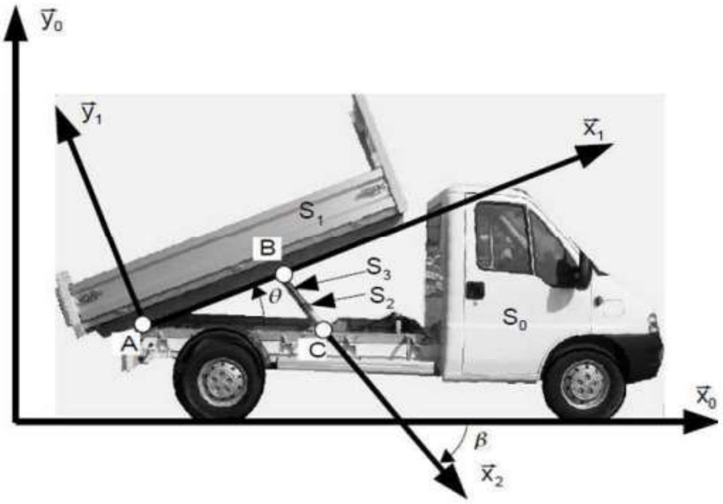
CORRIGE CAMION BENNE

Problématique : **L'exigence de vitesse est-elle respectée pour la benne du camion ?**

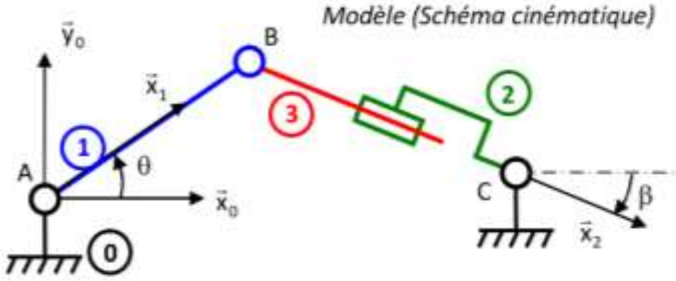
Contexte

On s'intéresse à un camion en phase de déchargement dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel.

Le camion noté S_0 en déchargement soulève l'ensemble S_1 (benne + chargement) de centre de gravité G et de masse M = 7000 kg constitué de la benne et de la matière transportée. Un vérin (corps de vérin S_2 et tige S_3) commande le mouvement.



Modèle (Schéma cinématique)



Exigence technique	Critère	Niveau
1.5	Vitesse angulaire de la benne	< 0,5 tr/min

Paramétrage :			
Le CEC $\{0\}$ constitue le bâti	CEC	Repère	$\overrightarrow{AB} = L.\vec{x}_1$
	$\{0\}$ socle	$R_0(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$	$\overrightarrow{AG} = x_G.\vec{x}_1 + y_G.\vec{y}_1$
	$\{1\}$ benne	$R_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$	$\overrightarrow{BC} = \lambda.\vec{x}_2$
	$\{2\}$ corps vérin	$R_2(C,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$	$\overrightarrow{AC} = x_C.\vec{x}_0 + y_C.\vec{y}_0$
	$\{3\}$ tige vérin	$R_3(B,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$	$\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$ $\beta = (\vec{x}_0,\vec{x}_2)$

Questions

Q1 *Représenter les figures de changement de base.*

Q2 *En déduire les vecteurs rotations associés à chaque figure.*

Q3 *Exprimer l'expression littérale du vecteur position $\overrightarrow{AB}$ dans le repère d'observation R_0.*

Q4 *Exprimer l'expression littérale du vecteur vitesse $\vec{V}_{B\in1/0}$.*

Q5 *Exprimer l'expression littérale du vecteur vitesse $\vec{V}_{B\in3/2}$.*

Q6 *Exprimer l'équation vectorielle de fermeture géométrique.*

Q7 *Projeter l'équation vectorielle obtenue dans le repère R_0.*

Q8 *En déduire la loi d'entrée sortie λ en fonction de θ.*

On donne les caractéristiques du vérin :

- débit volumique d'huile injectée dans le vérin noté Q m^3/s)
- Surface du piston du vérin notée S (en m^2)
- Vitesse de déploiement du vérin notée V (en m/s)

Q9 *Exprimer le débit Q dans le vérin en fonction de sa vitesse de déploiement V et de la surface du piston S.*

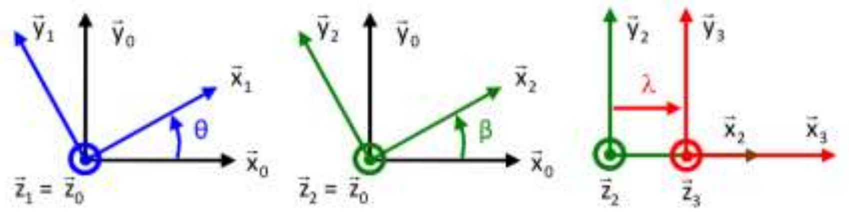
Q10 *Dériver l'expression de λ obtenue à la Q8 et déterminer Q en fonction de $\dot{\theta}$ et de θ.*

L'étude de l'application numérique de la formule précédente aboutit la relation $\dot{\theta}_{max} = 70.Q$

Q11 *Le vérin délivrant 0,4 Litres/s, conclure quant à la capacité de la benne à satisfaire l'exigence de vitesse angulaire.*

CORRIGE CAMION BENNE (CORRIGE EN LIGNE)

Q1 *Représenter les figures de changement de base.*



Q2 *Exprimer les vecteurs rotation*

$$\boxed{\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}.\vec{z}_0} \qquad \boxed{\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\beta}.\vec{z}_0}$$

Q3 *Etablir l'expression littérale du vecteur position $\overrightarrow{AB}$*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = L.\vec{x}_1 = L.\cos\theta.\vec{x}_0 + L.\sin\theta.\vec{y}_0}$$

Q4 *Etablir l'expression littérale du vecteur vitesse $\vec{V}_{B\in 1/0}$ par le calcul direct*

$$\vec{V}_{B\in 1/0} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{/R_0} = \left[\frac{d}{dt}(L.\cos\theta.\vec{x}_0 + L.\sin\theta.\vec{y}_0)\right]_{/R_0} = -L.\dot{\theta}.\sin\theta.\vec{x}_0 + L.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{y}_0$$

$$\boxed{\vec{V}_{B\in 1/0} = -L.\dot{\theta}.\sin\theta.\vec{x}_0 + L.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{y}_0}$$

Q5 *Etablir l'expression littérale du vecteur vitesse $\vec{V}_{B\in 3/2}$*

$$\vec{V}_{B\in 3/2} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{CB}\right]_{/R_2} = \left[\frac{d}{dt}(-\lambda.\vec{x}_2)\right]_{/R_3} + \vec{0}\wedge\overrightarrow{CB} = \left[\frac{d}{dt}(-\lambda)\right]_{/R_3}.\vec{x}_2 - \lambda.\left[\frac{d}{dt}(\vec{x}_2)\right]_{/R_3} + \vec{0} = -\dot{\lambda}.\vec{x}_2$$

(C point origine du repère 2, $\vec{\Omega}_{3/2} = \vec{0}$ *et* $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ fixe dans R_3*)*

$$\boxed{\vec{V}_{B\in 3/2} = -\dot{\lambda}.\vec{x}_2}$$

Q6 Etablir l'équation *vectorielle de fermeture géométrique*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\boxed{L.\vec{x}_1 + \lambda.\vec{x}_2 - x_c.\vec{x}_0 - y_c.\vec{y}_0 = \vec{0}}$$

Q7 *Projeter l'équation vectorielle obtenue dans le repère R_0.*

(1) en projection sur $\vec{x}_0$ $\quad\boxed{L.\cos\theta + \lambda.\cos\beta - x_c = 0}$

(1) en projection sur $\vec{y}_0$ $\quad\boxed{L.\sin\theta + \lambda.\sin\beta - y_c = 0}$

Q8 *En déduire la loi d'entrée sortie λ en fonction de θ.*

En observant les équations Q7 on remarque que pour obtenir une loi d'entrée-sortie $\lambda = f(\theta)$ il faut éliminer le paramètre β.
Comme il apparait sous la forme $\cos\beta$ dans une équation et $\sin\beta$ dans l'autre, il faut utiliser la formule $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$
Il faut donc sortir $\cos\beta$ et $\sin\beta$ de (2) et appliquer la formule de trigo $(\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1)$.

$$\sin\beta = \frac{y_c - L.\sin\theta}{\lambda} \qquad \left(\frac{y_c - L.\sin\theta}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{x_c - L.\cos\theta}{\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\cos\beta = \frac{x_c - L.\cos\theta}{\lambda} \qquad (y_c - L.\sin\theta)^2 + (x_c - L.\cos\theta)^2 = \lambda^2$$

$$\boxed{\lambda_{(t)} = \sqrt{\left(y_c - L.\sin\theta_{(t)}\right)^2 + \left(x_c - L.\cos\theta_{(t)}\right)^2}}$$

Q9 *Exprimer le débit Q dans le vérin en fonction de sa vitesse de déploiement V et de la surface du piston S.*

$$\boxed{Q = V.S}$$

Q10 *Dériver l'expression obtenue question précédente et déterminer Q en fonction de $\dot{\theta}$ et de θ.*

$$\boxed{\lambda_{(t)} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + L^2 - 2.L.(x_c\cos\theta + y_c\sin\theta)}}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{-\frac{1}{2}.2.L.\left(-x_c.\dot{\theta}.\sin\theta + y_c.\dot{\theta}.\cos\theta\right)}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + L^2 - 2.L.(x_c\cos\theta + y_c\sin\theta)}}$$

et $\dot{\lambda} = V$ vitesse de déploiement du vérin

$$\dot{\lambda} = \frac{-\frac{1}{2}.2.L.\left(-x_c.\dot{\theta}.\sin\theta + y_c.\dot{\theta}.\cos\theta\right)}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + L^2 - 2.L.(x_c\cos\theta + y_c\sin\theta)}}$$

$$\boxed{Q = S.\frac{-L.\left(-x_c.\dot{\theta}.\sin\theta + y_c.\dot{\theta}.\cos\theta\right)}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + L^2 - 2.L.(x_c\cos\theta + y_c\sin\theta)}}}$$

Q11 *Le vérin délivrant 0,4Litres/s, conclure quant à la capacité de la benne à satisfaire l'exigence de vitesse angulaire.*

$$\dot{\theta}_{max} = 70.Q = 70.0{,}4.10^{-3} = 0{,}028\,rad/s = 0{,}27\ tr/mn < 0{,}5\,tr/mn$$

Le cahier des charges est respecté !