Systèmes linéaires, continus et invariants : asservissements

Chapitre 1: révisions de première année

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel
DIJON

Chapitre 1: révisions de première année

1. Problématique
2. Modélisation des SLCI
3. Réponse temporelle
4. Réponse fréquentielle
5. Performances : rapidité et précision
6. Optimisation des performances : correcteur proportionnel
7. Formules à retenir

F. BLASCHECK

UNE VISION D'AVENIR DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
Lycée Eiffel DIJON

1. Problématique

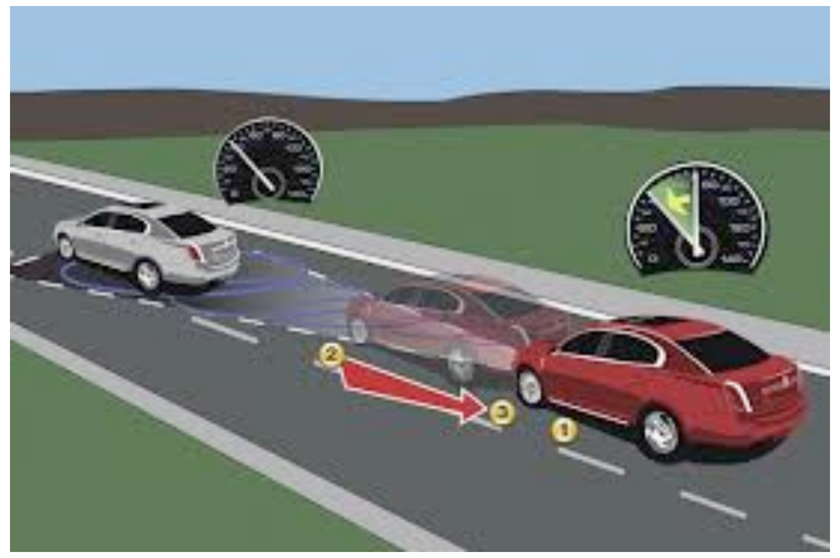
Un SLCI asservi est un système automatique dont le comportement va évoluer en fonction de son environnement dans le but de suivre une consigne.

La consigne peut-être une température, une position, une force, une vitesse ou toute autre grandeur physique.

F. BLASCHECK

Asservie en force

Asservi en position



Asservie en vitesse

Asservi en position et en vitesse

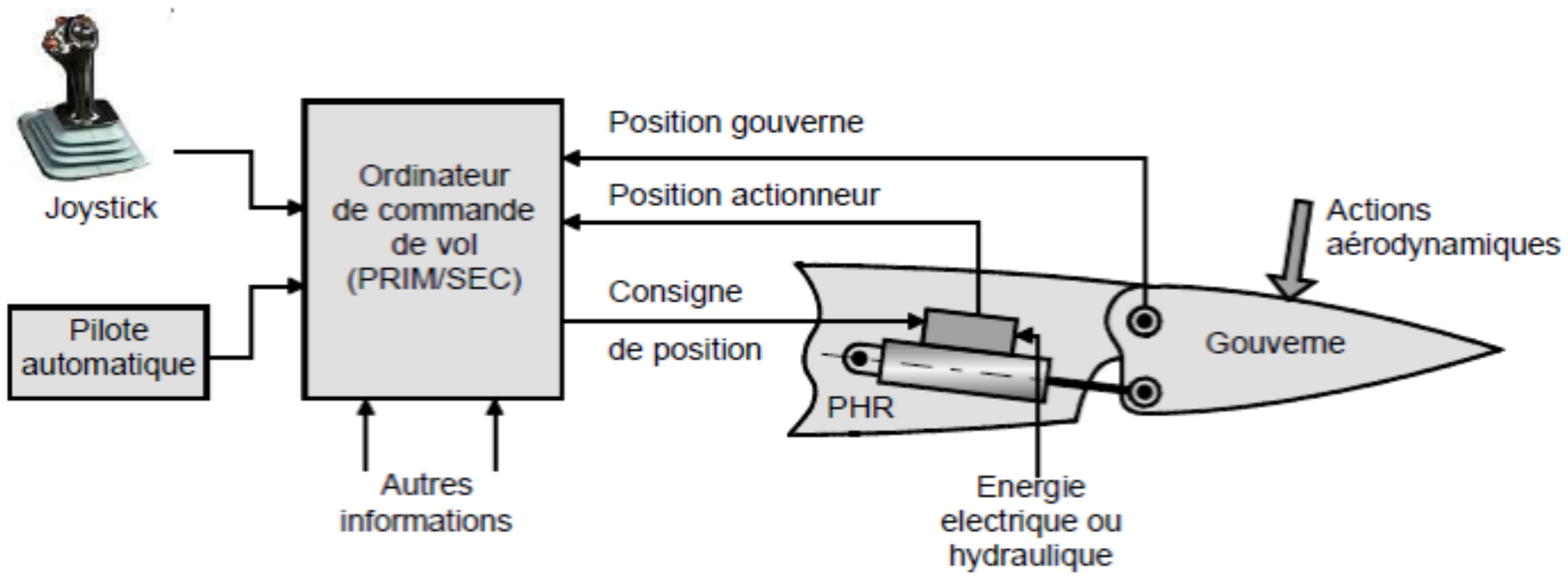
Asservi en position

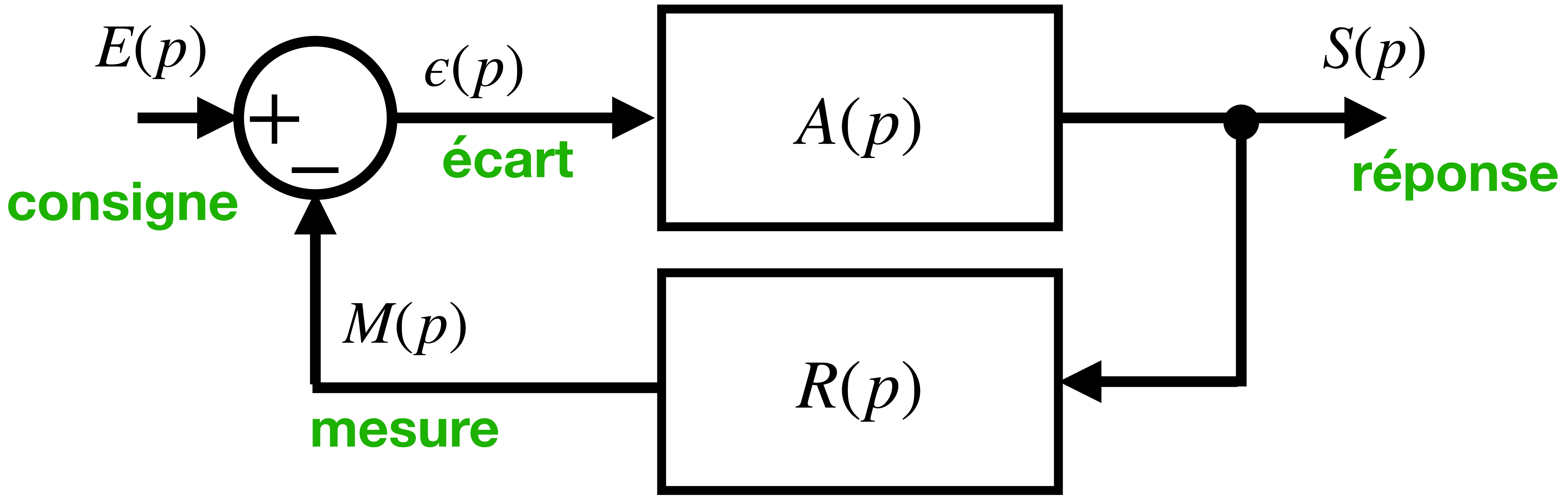
Lycée Eiffel

1. Problématique

La consigne est comparée en temps réel à la réponse du système à l'aide de capteurs. **L'écart ainsi calculé est corrigé** et devient la grandeur pilotante de la chaîne de puissance.

Ainsi, le système adapte sa réponse dans **le but d'annuler l'écart**. Il arrive ainsi dans un état final correspondant à la consigne demandée.





A380 : asservissement en position des gouvernes de profondeur

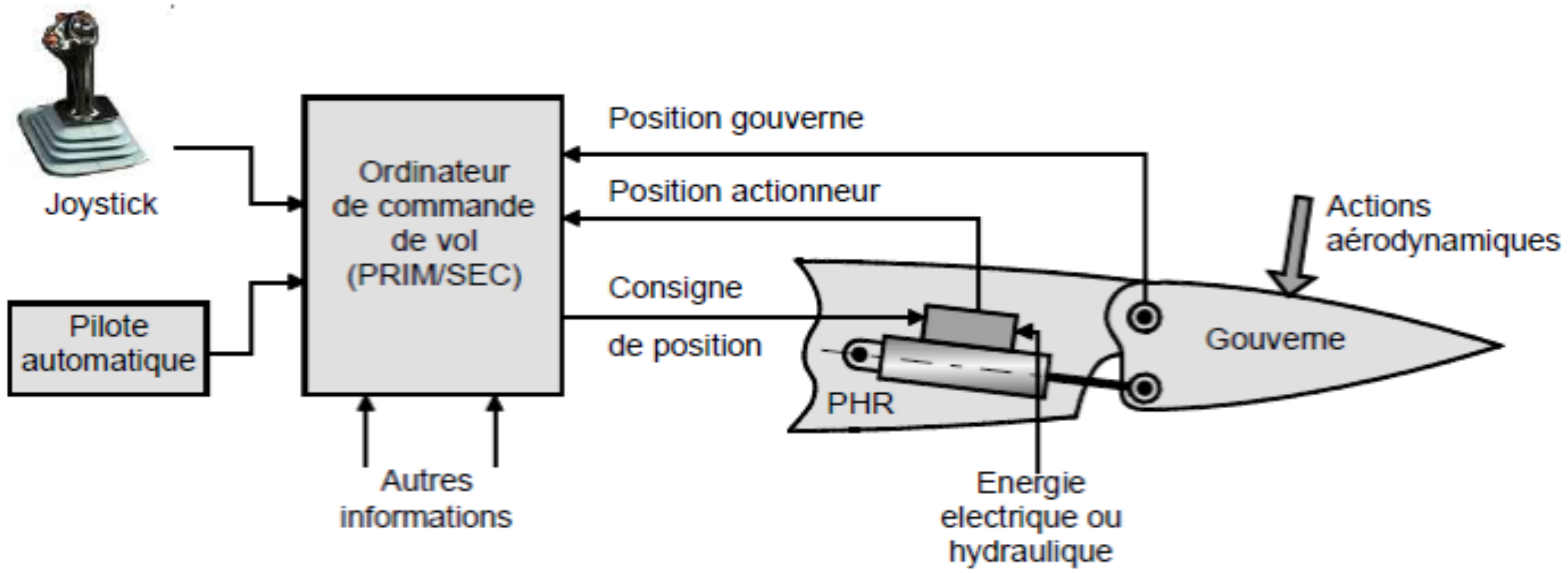
F. BLASCHECK

Lycée Eiffel

1. Problématique

La problématique de **l'étude des SLCI** asservi est d'être capable de les **modéliser**, **de prévoir et d'améliorer leurs performances** : **stabilité, précision et rapidité.**

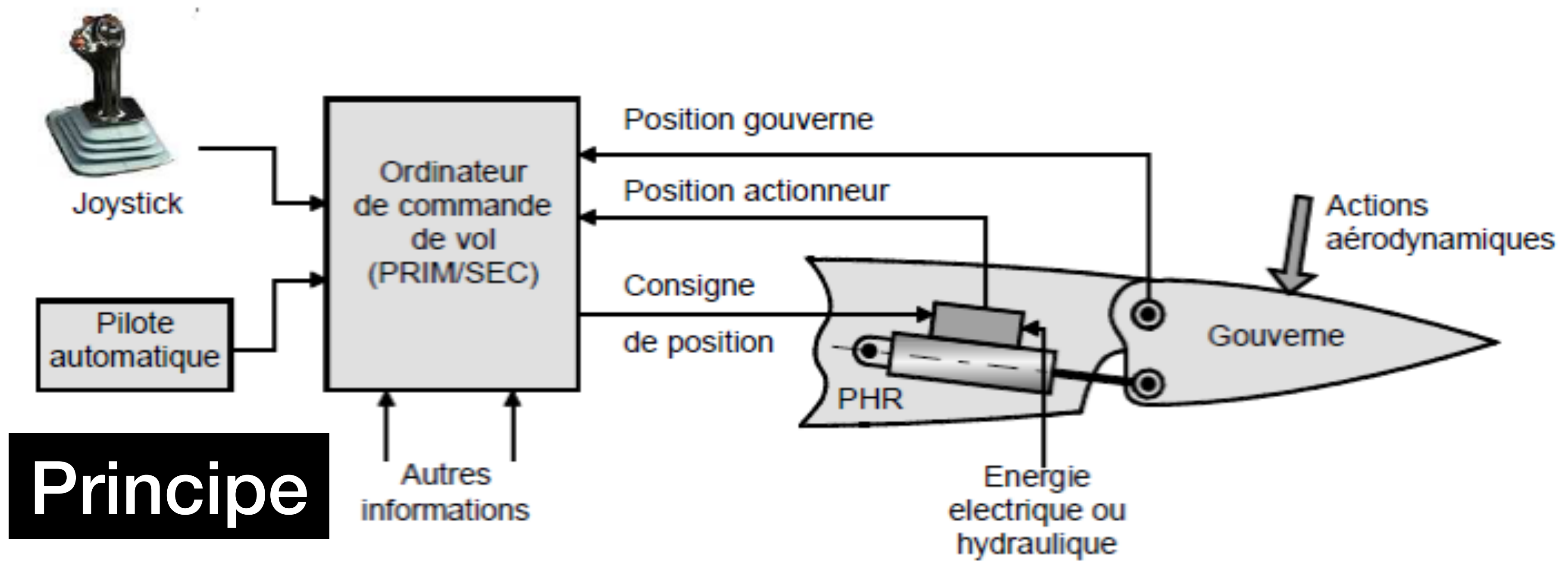
On parle alors de l'étude de **la réponse du SLCI** en fonction de **la consigne** demandée, de ses composants et des grandeurs extérieures affectant son comportement: **les perturbations**.



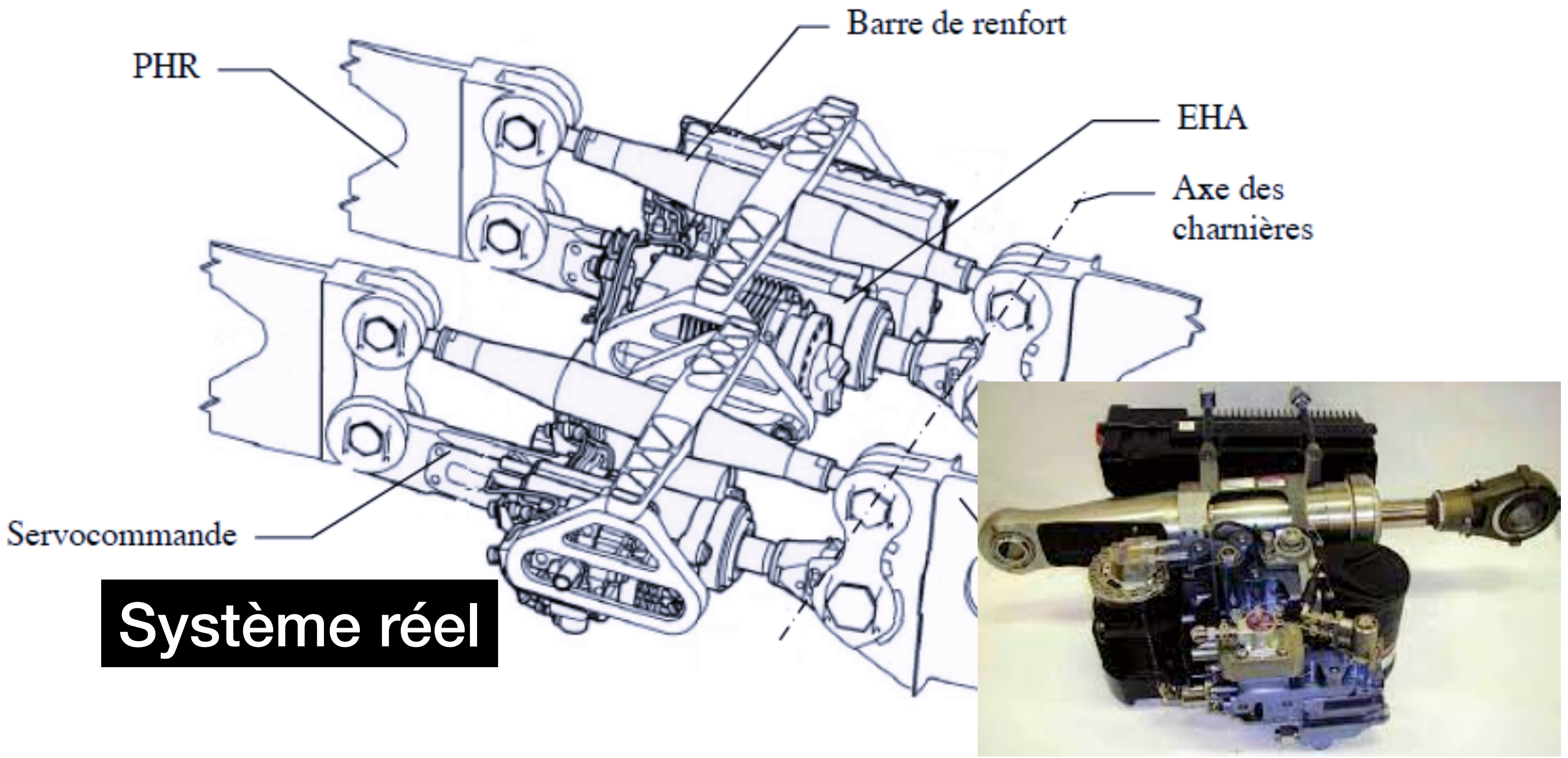
A380 : asservissement en position des gouvernes de profondeur

F. BLASCHECK

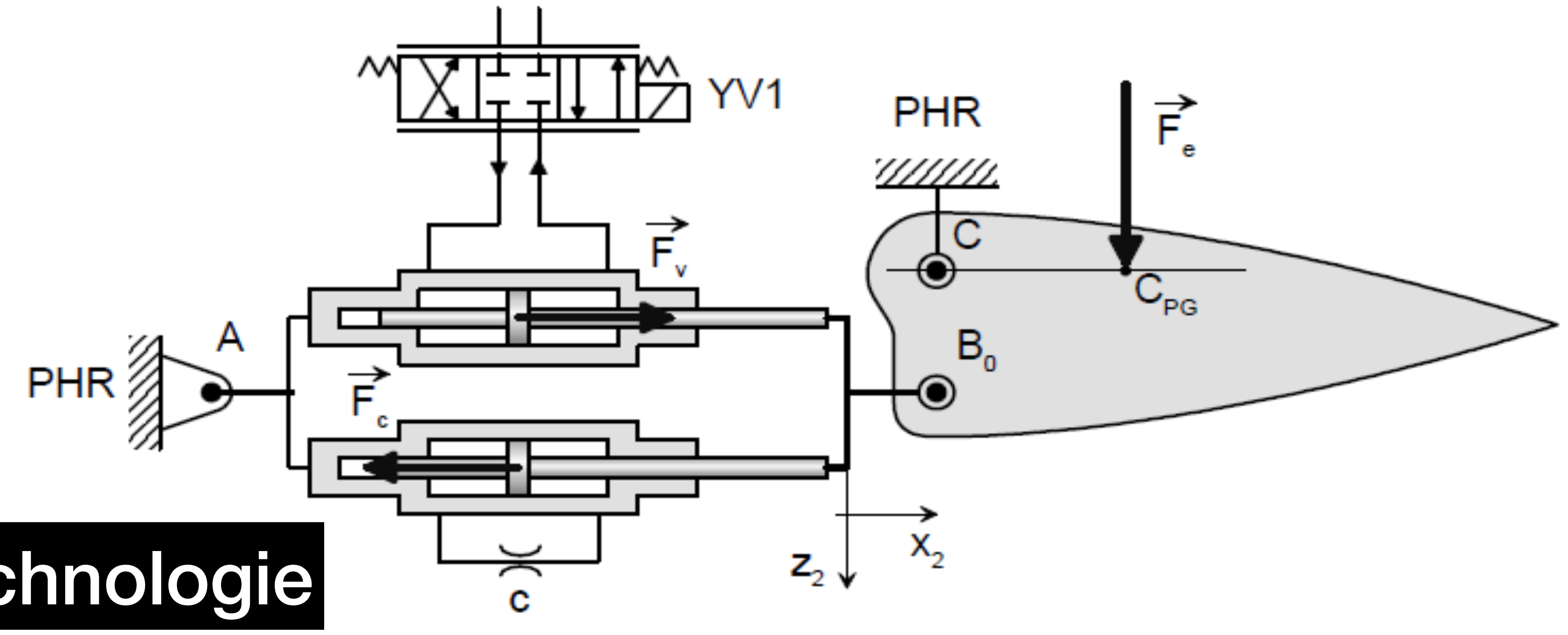
2. Modélisation des SLCI



Principe



Système réel



Technologie

La modélisation d'un SLCI asservi consiste au passage du système réel à **un schéma-bloc** représentant l'asservissement.

Le point de départ est **l'analyse de la structure du système** : les composants et leurs liens.

2. Modélisation des SLCI

La modélisation de chaque composant par **une fonction de transfert dans le domaine de Laplace** permet l'élaboration du **schéma-bloc**.

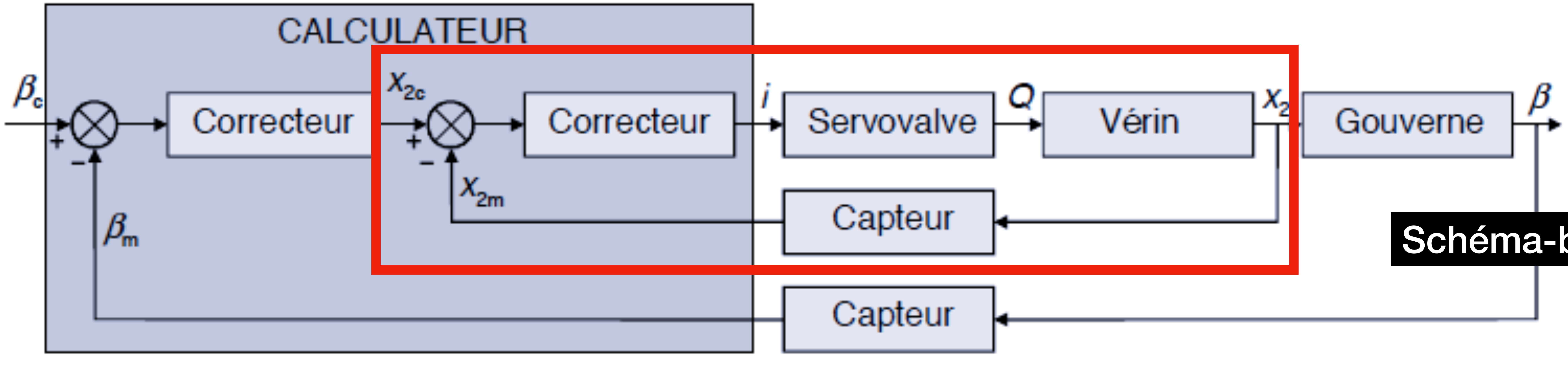


Schéma-bloc fonctionnel

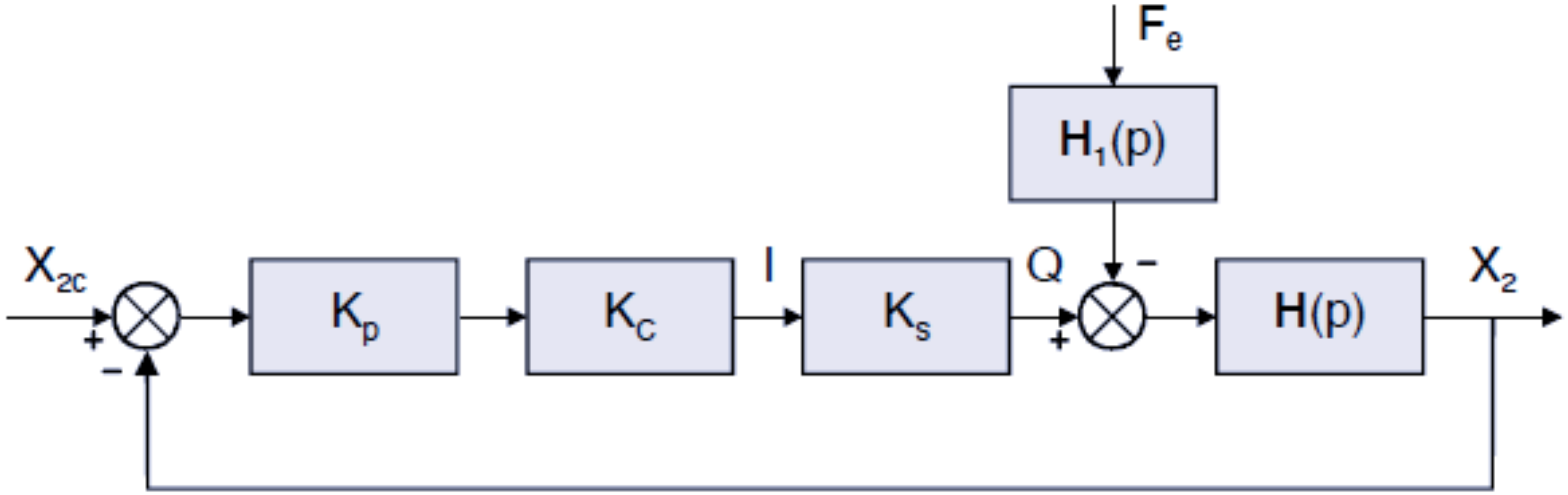


Schéma-bloc partiel dans Laplace

F. BLASCHECK
Lycée Eiffel

2. Modélisation des SLCI

1 composant = 1 bloc = 1 fonction de transfert

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow S(p)$$

- **par des équations différentielles : modèle de connaissance ;**

  Application de la transformée de Laplace à l'équation

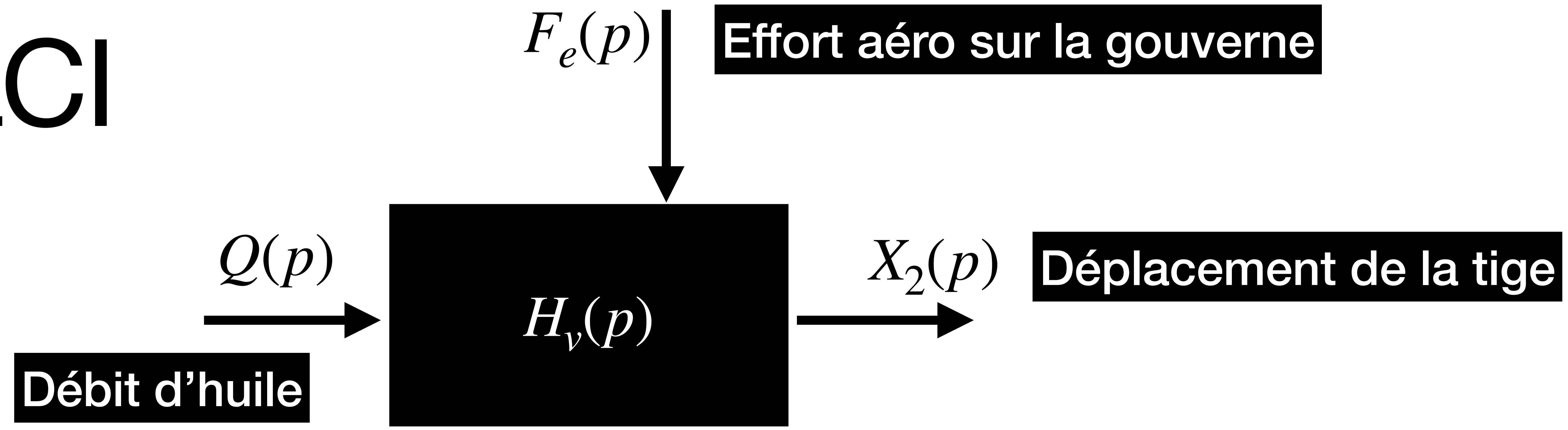
  Dérivée 1^{ere} : on multiplie par p

  Dérivée 2^{nde} : on multiplie par p^2

  Elaboration du schéma-bloc

  Expression de la fonction de transfert : $\boxed{H(p) = \frac{sortie}{entree} = \frac{S(p)}{E(p)}}$

2. Modélisation des SLCI

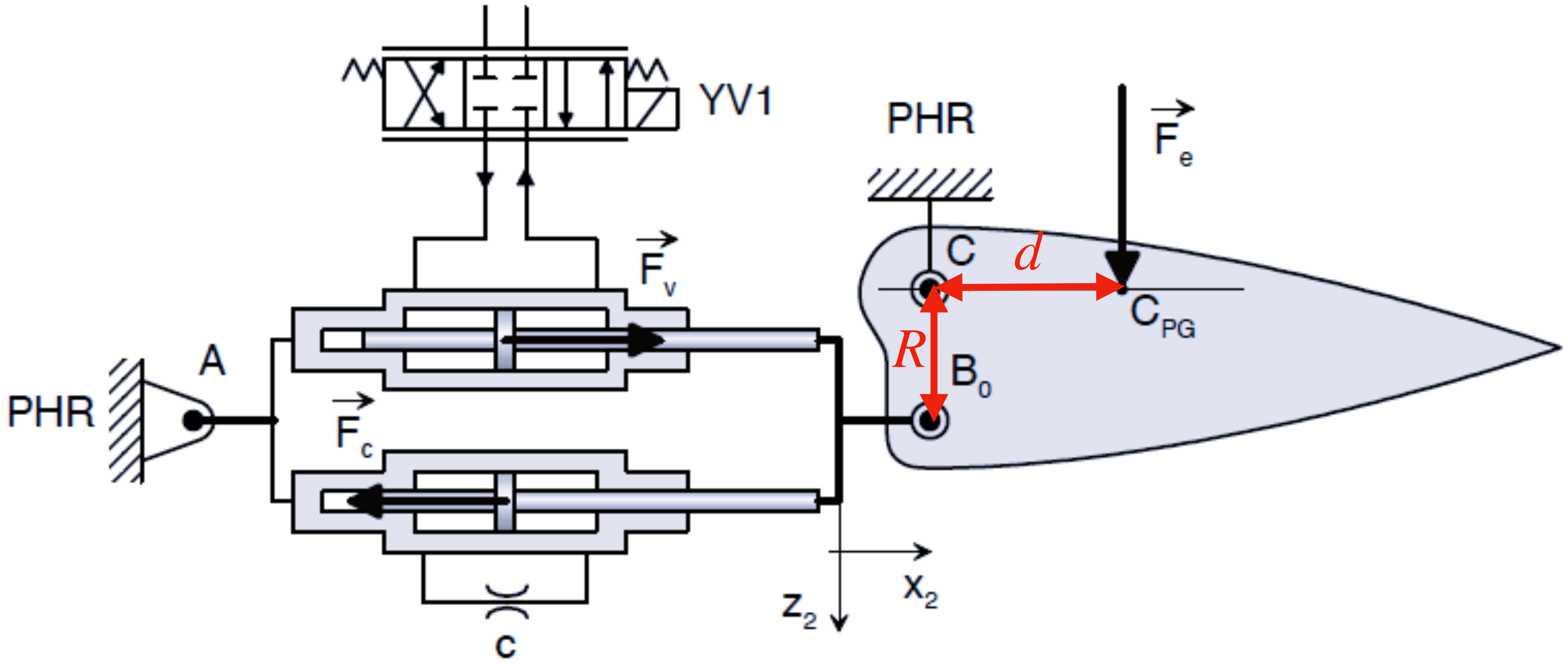


Modélisation du vérin hydraulique :

- **équations différentielles : modèle de connaissance ;**

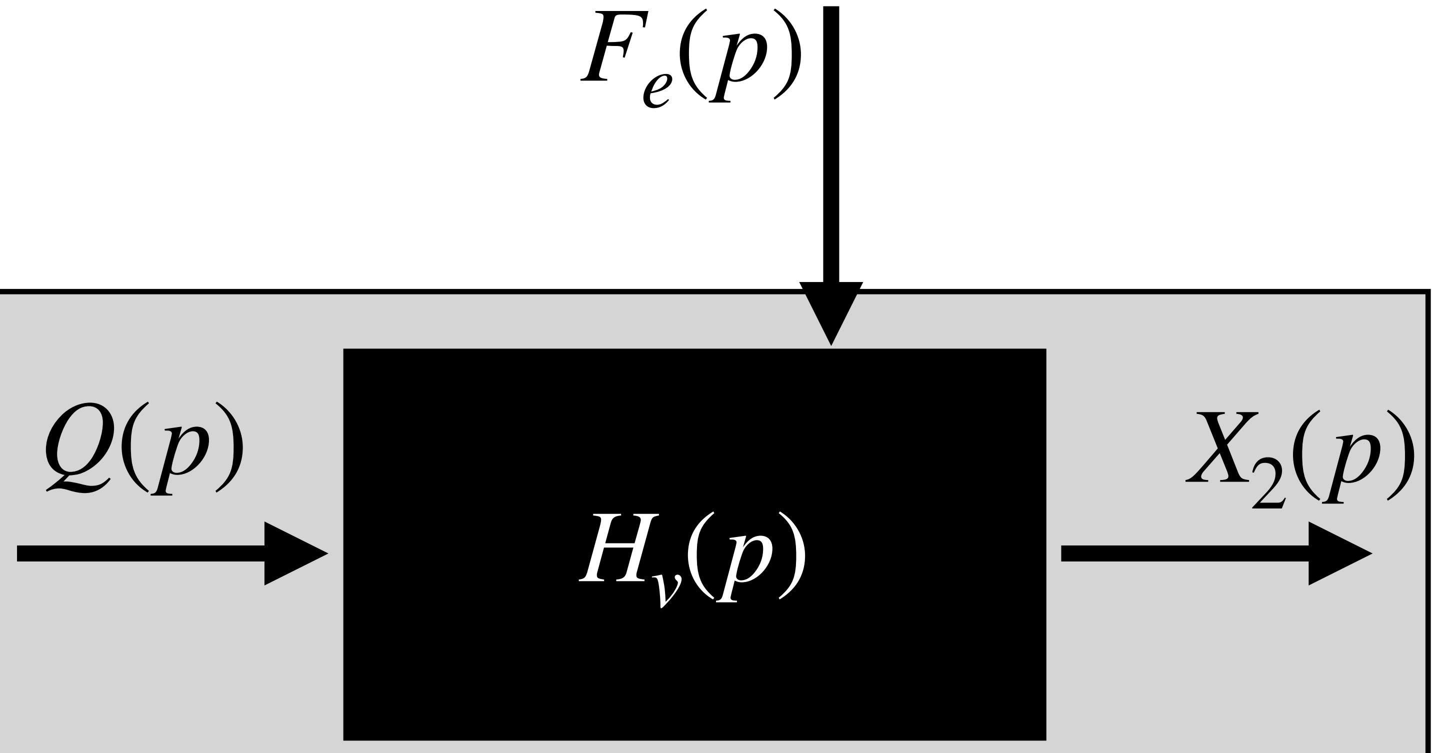
$$\boxed{Q(t) = S\frac{dx_2}{dt} + \frac{V_0}{2B}\frac{dP}{dt}}$$

$$\boxed{m_e\,\ddot{x}_2 + c\,\dot{x}_2 = PS - \frac{d}{R}F_e}$$



F. BLASCHECK

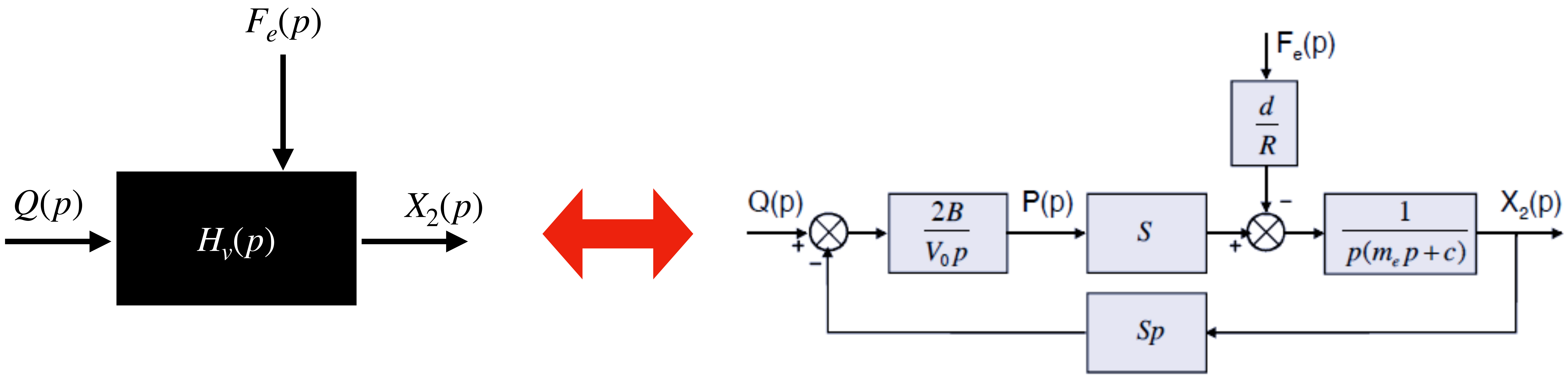
2. Modélisation des SLCI



Modélisation du vérin hydraulique :

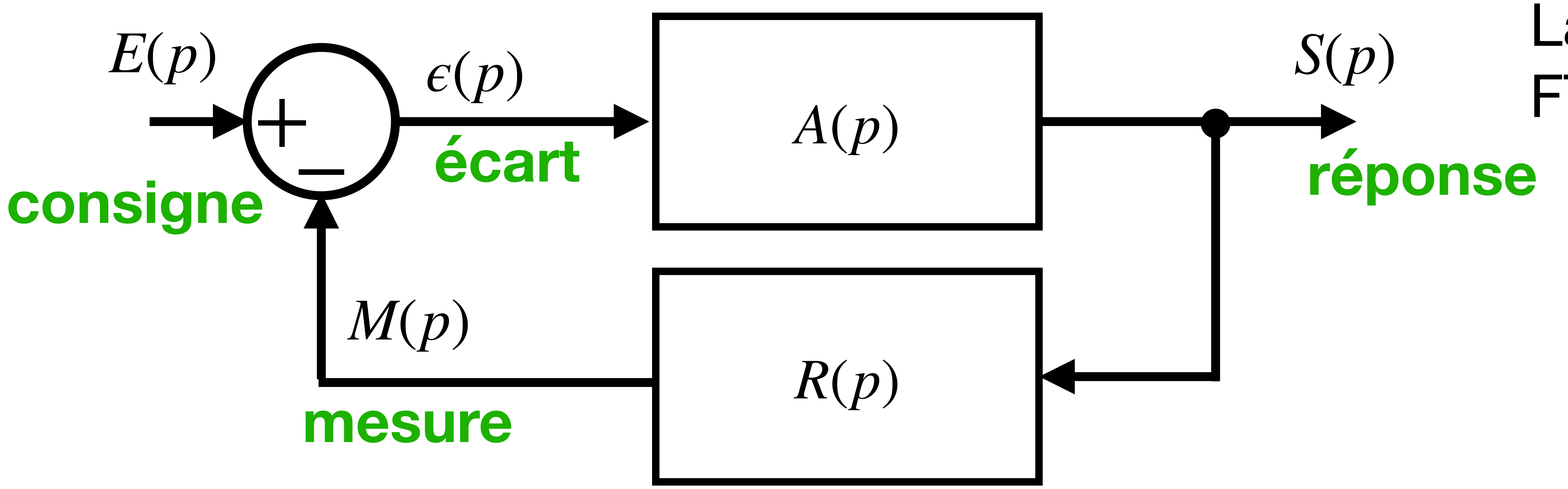
2. Modélisation des SLCI

Modélisation du vérin hydraulique :



Expression de la fonction de transfert :

2. Modélisation des SLCI



La fonction de transfert en boucle fermée, FTBF, est la loi E/S de l'asservissement :

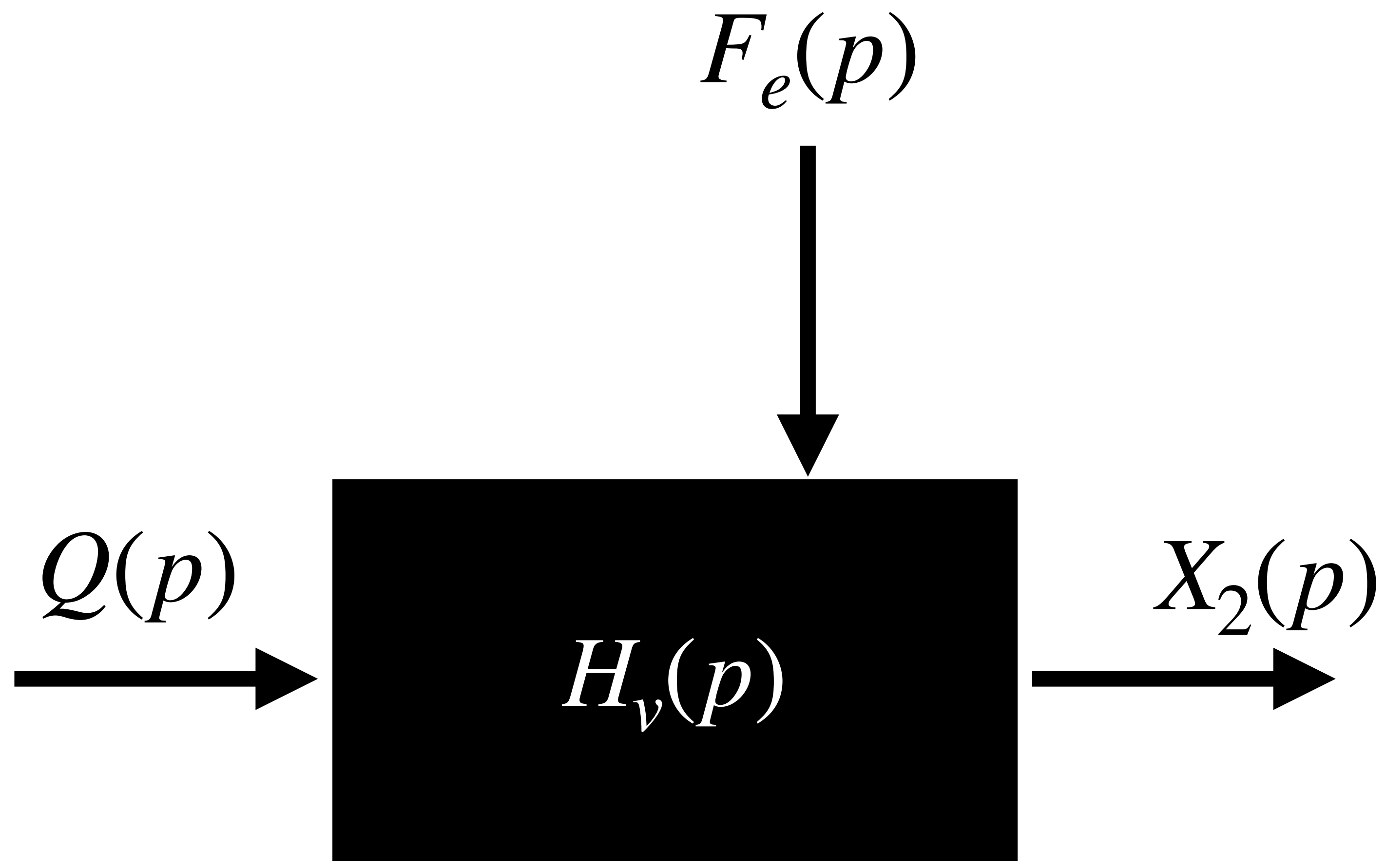
$$\boxed{FTBF(p) = \frac{sortie}{entree} = \frac{S(p)}{E(p)}}$$

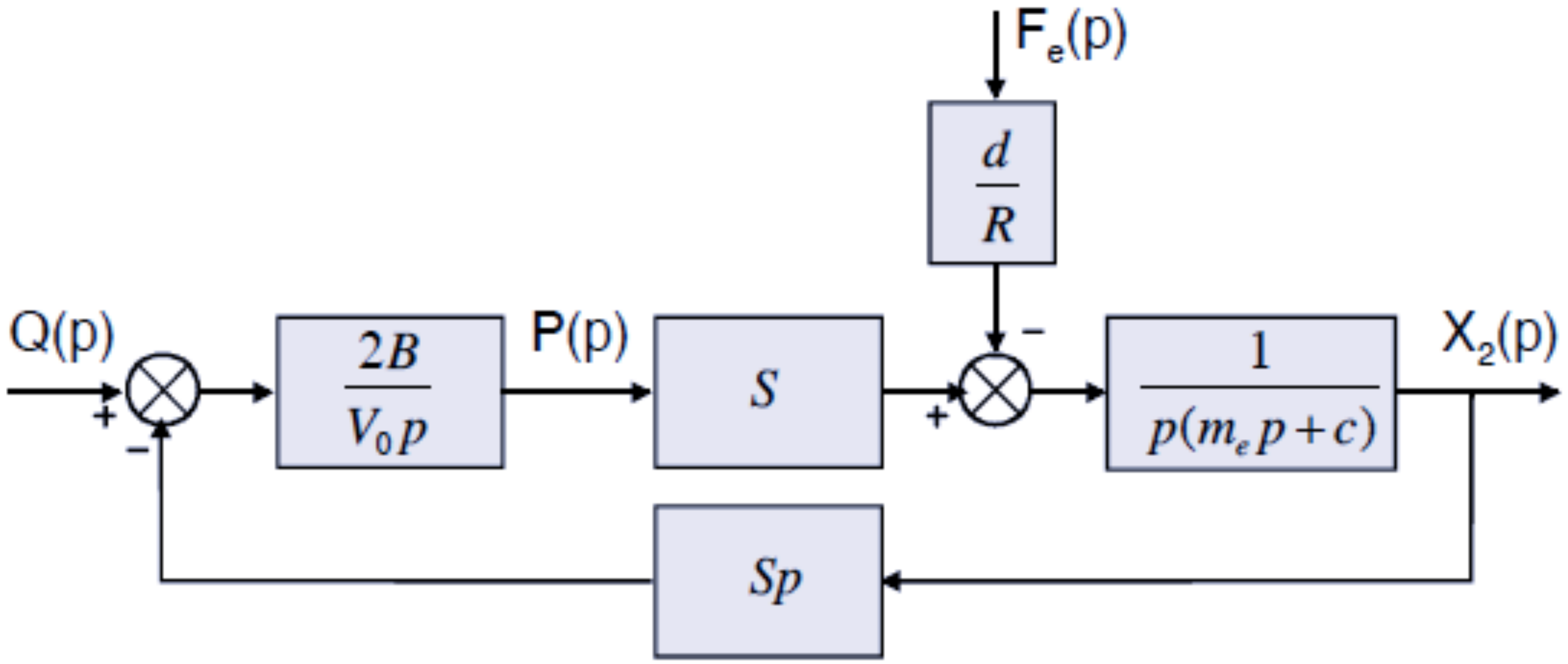
$$\boxed{FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)\,.\,R(p)} = \frac{\prod blocsaller}{1 + \prod blocsallerretour}}$$

Formule de Black

2. Modélisation des SLCI

Modélisation du vérin hydraulique :





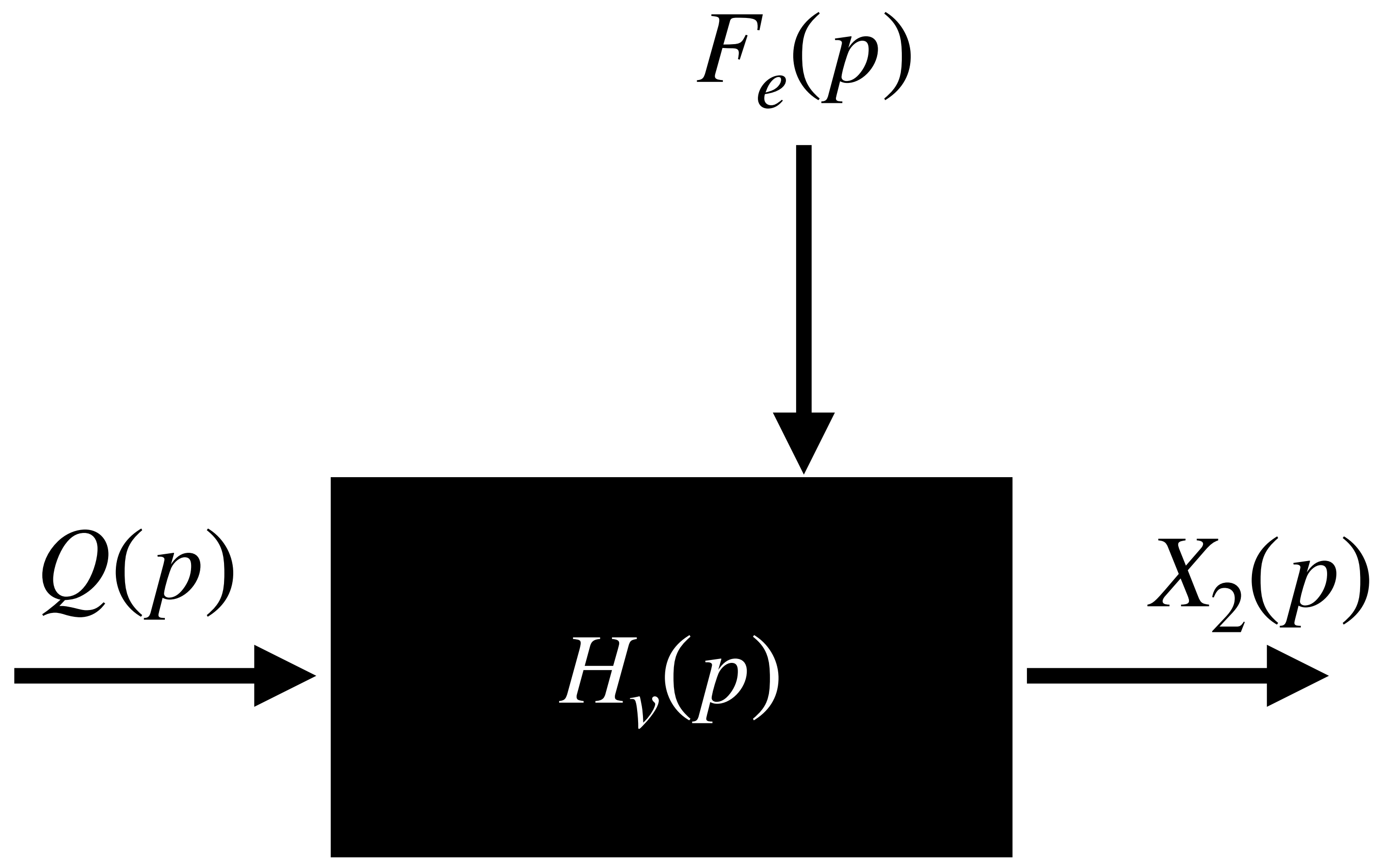
Expression de la fonction de transfert $\frac{X_2(p)}{Q(p)}$:

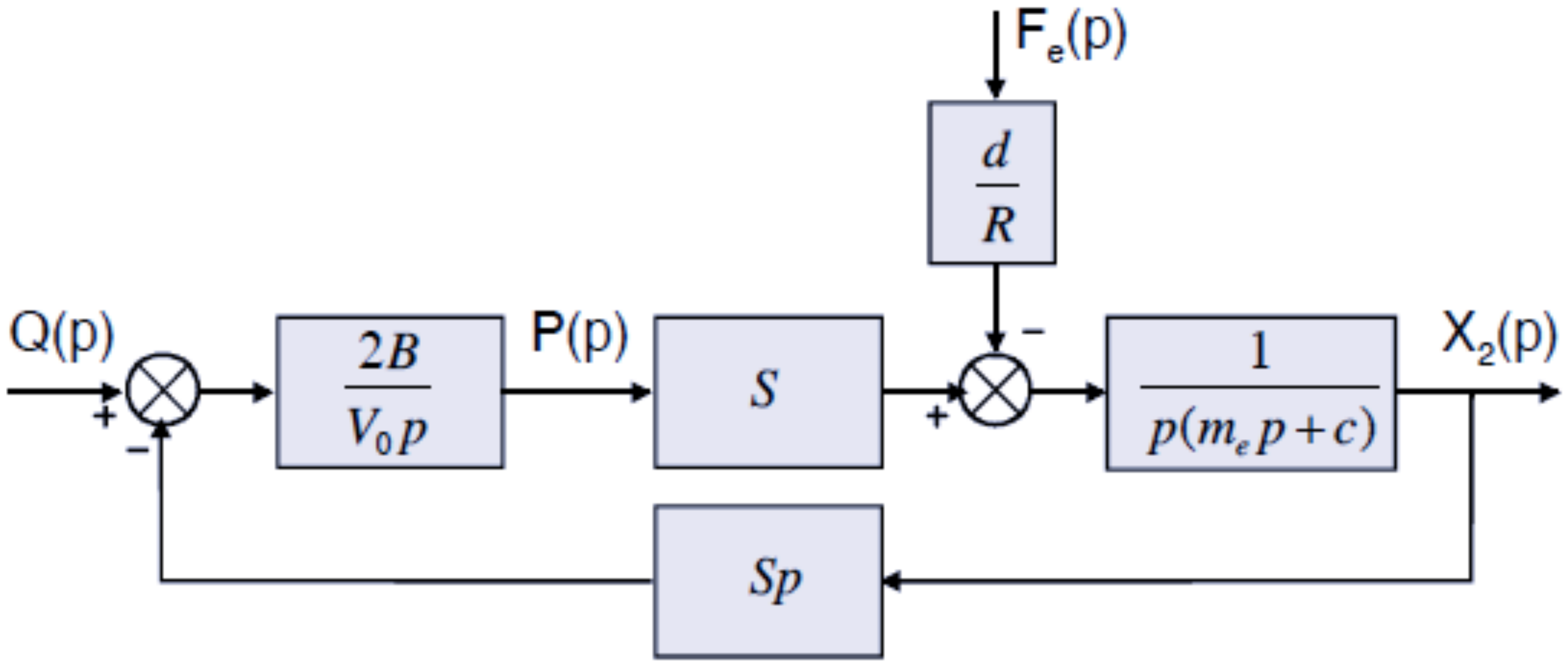
2. Modélisation des SLCI

Expression de la fonction de transfert $\dfrac{X_2(p)}{Q(p)}$:

2. Modélisation des SLCI

Modélisation du vérin hydraulique :





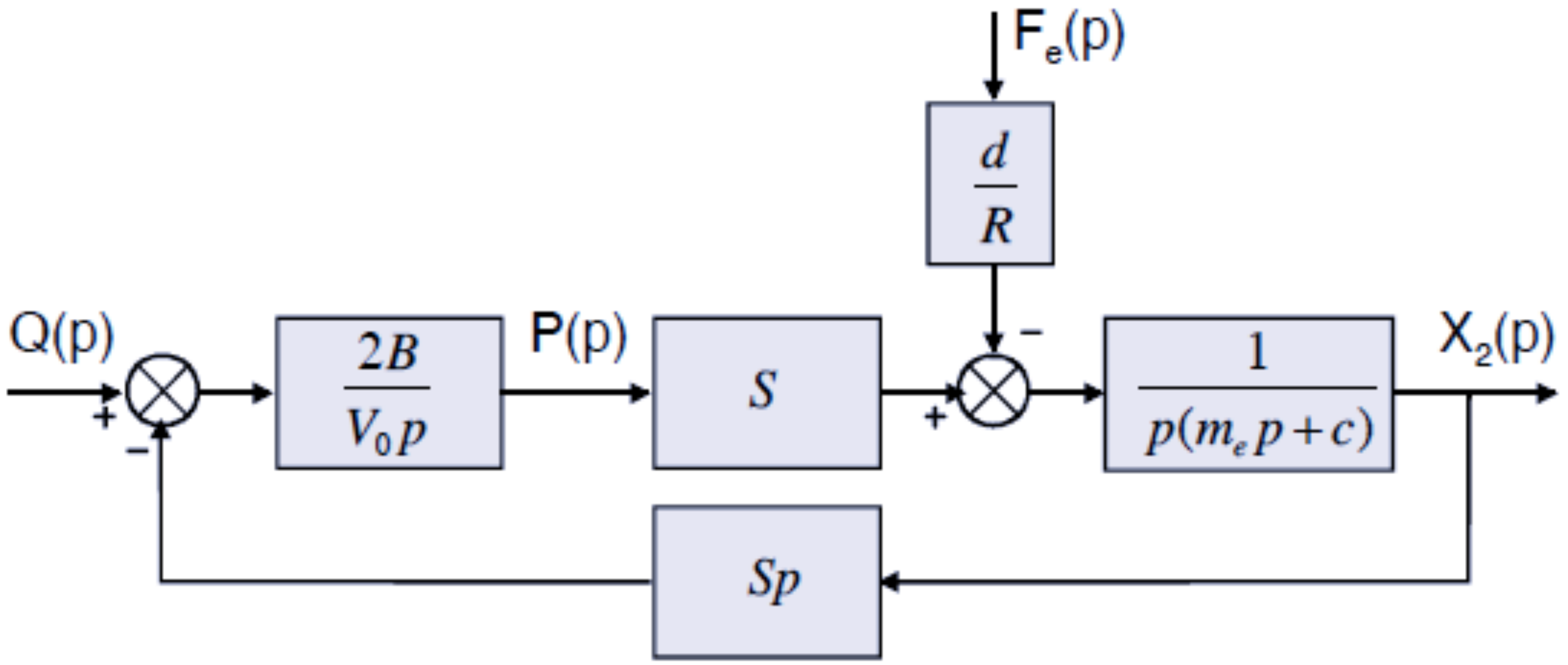
Expression de la fonction de transfert $\frac{X_2(p)}{F_e(p)}$:

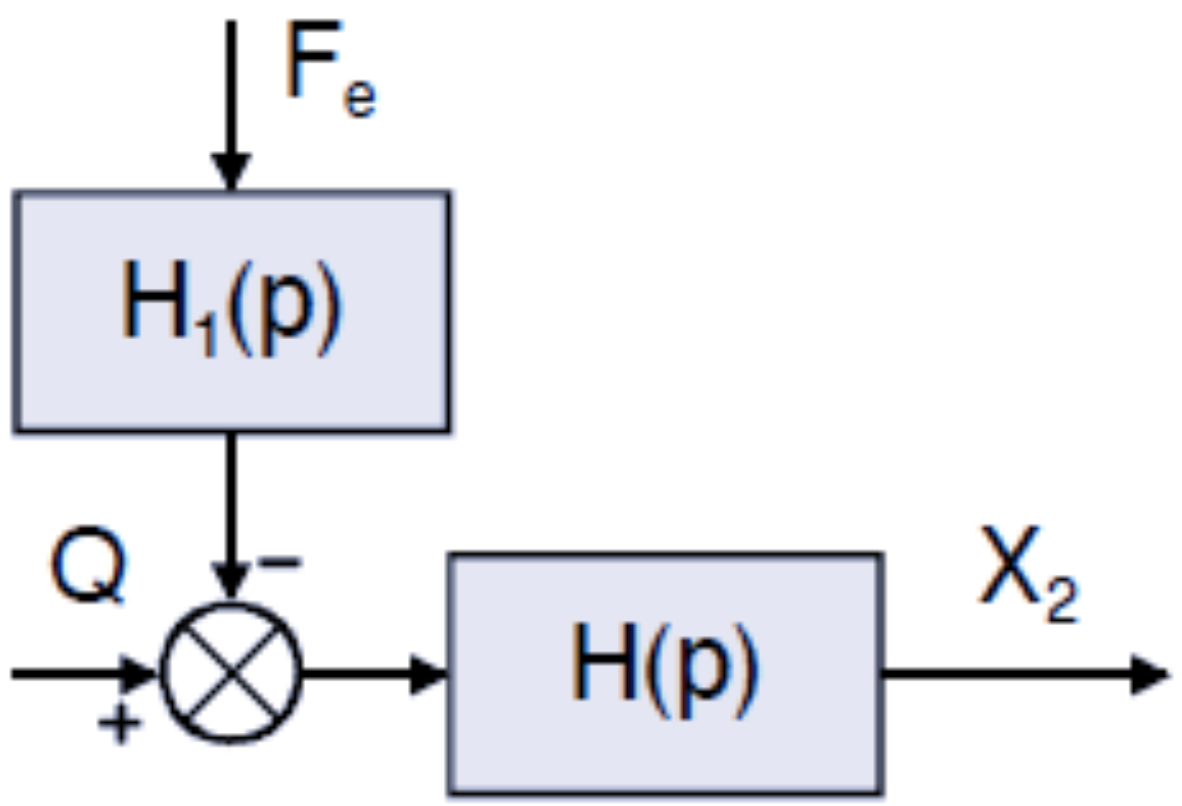
2. Modélisation des SLCI

Expression de la fonction de transfert $\frac{X_2(p)}{F_e(p)}$:

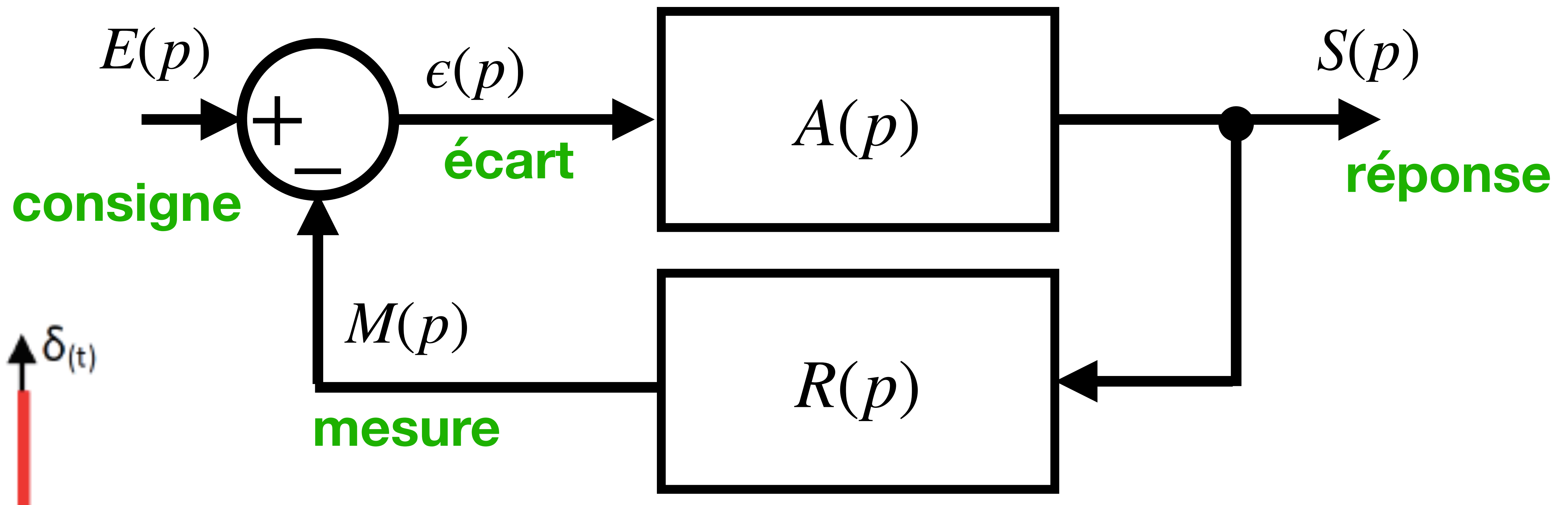
2. Modélisation des SLCI

Finalement, le modèle du vérin hydraulique est :





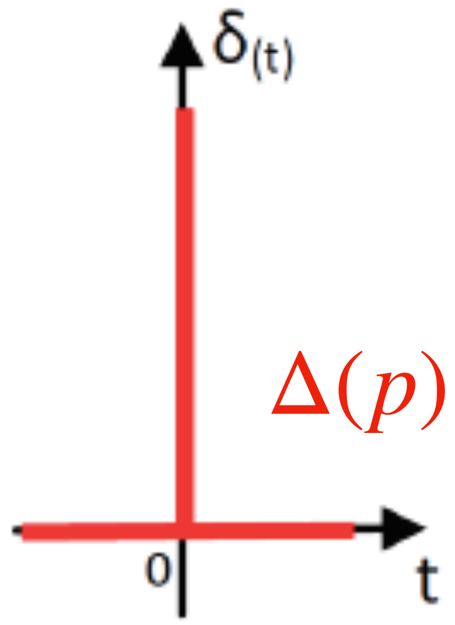
3. Réponse temporelle



La réponse temporelle d'un SLCI asservi est l'étude de la sortie en fonction du temps **pour différents types de consignes**.

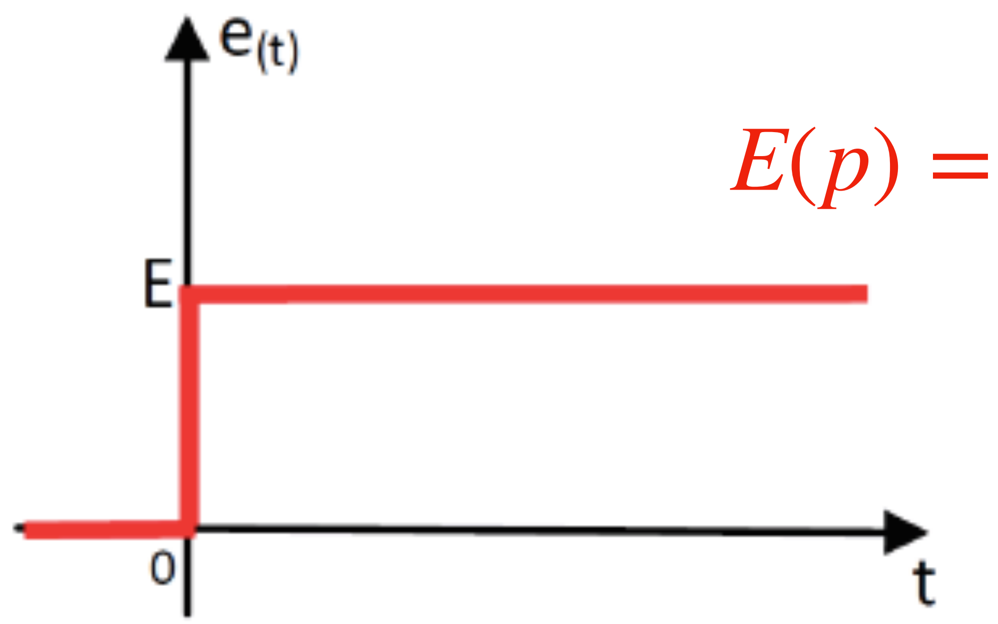
La **FTBF** suffit pour répondre à cette problématique.

Nous pourrons ensuite analyser **les performances en précision et rapidité** du SLCI.



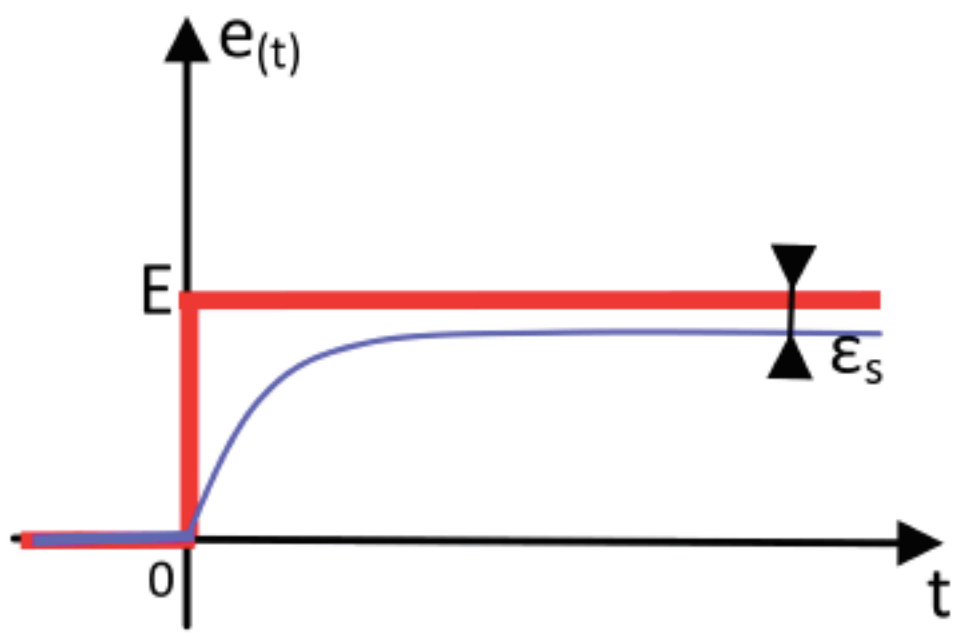
$\Delta(p) = 1$

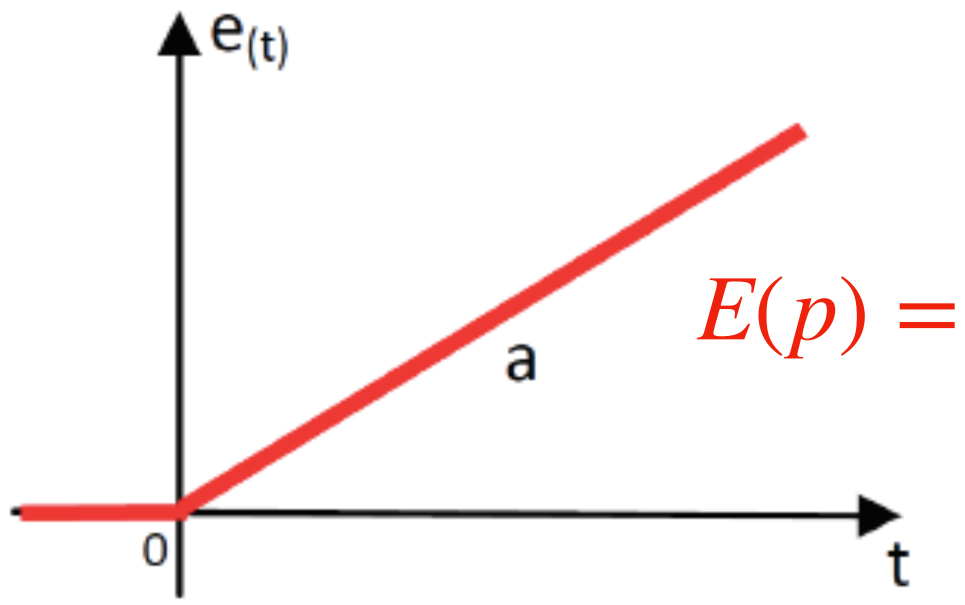
Impulsion de Dirac



$E(p) = \dfrac{E}{p}$

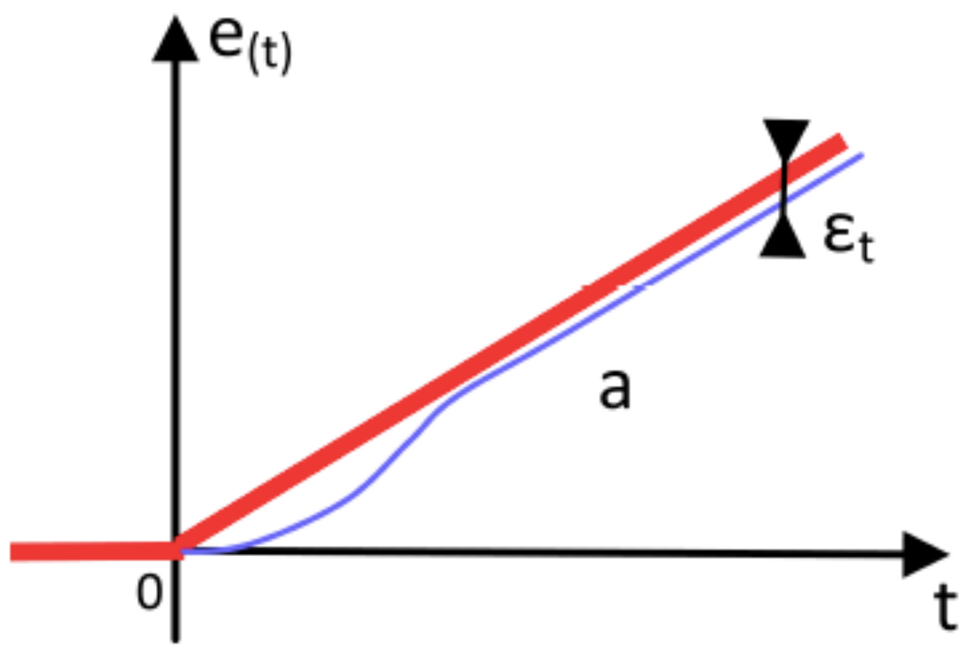
Echelon





$E(p) = \dfrac{a}{p^2}$

Rampe



3. Réponse temporelle

Le point de départ de l'étude temporelle est **l'ordre de la FTBF** :

ordre 1 : $FTBF(p) = \dfrac{K}{1 + \tau\,.\,p}$

K **:** gain statique

τ : constante de temps (s)

ordre 2 : $FTBF(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{{\omega_0}^2}}$

K **:** gain statique

z : facteur d'amortissement

ω_0 : pulsation propre (rad/s)

3. Réponse temporelle

Ensuite, il faut savoir si on cherche à étudier **le régime permanent**, lorsque $t \to +\infty$, ou alors **le régime transitoire**, lorsque le système évolue.

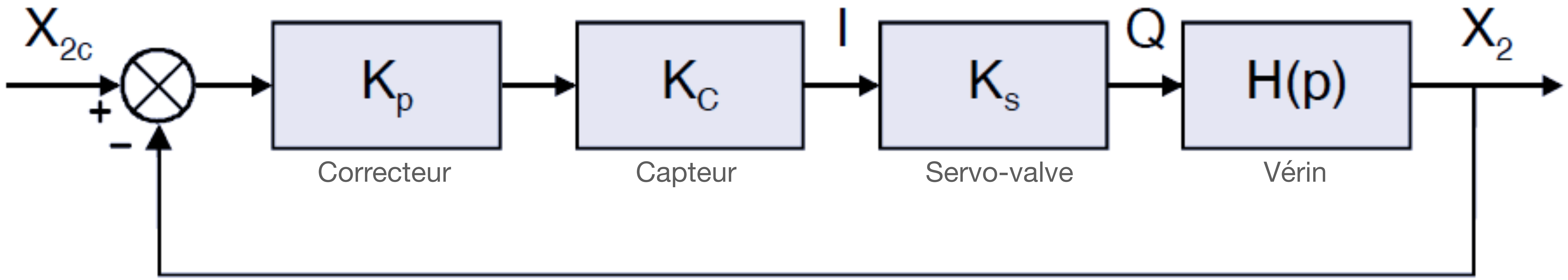
régime permanent : $t \to +\infty \Leftrightarrow p \to 0$

On peut alors simplement appliquer **le théorème de la valeur finale, TVF,** pour déterminer **la valeur de la réponse atteinte en régime permanent** :

TVF , $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} p \,.\, S(p)$

3. Réponse temporelle

Pour la gouverne de profondeur de l'A380 fonctionnant à vide, le schéma-bloc de l'asservissement en position du vérin hydraulique est :



$$H(p) = \frac{K_0}{p\left(1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Expression de la position atteinte en régime permanent pour une entrée échelon $X_{2c}(p) = \dfrac{X_0}{p}$:

3. Réponse temporelle

Expression de la position atteinte en régime permanent pour une entrée échelon $X_{2c}(p) = \dfrac{X_0}{p}$:

3. Réponse temporelle

Pour l'étude en **régime transitoire**, tout est très calculatoire. Il faudrait déterminer $s(t)$ en appliquant **la TDL inverse à la fonction $S(p)$**… puis tracer la fonction $s(t)$ pout $t > 0$….

En réalité, on ne le fait pas à la main, mais on utilise un logiciel du type MATLAB Simulink (en TP). Cependant pour l'écrit :

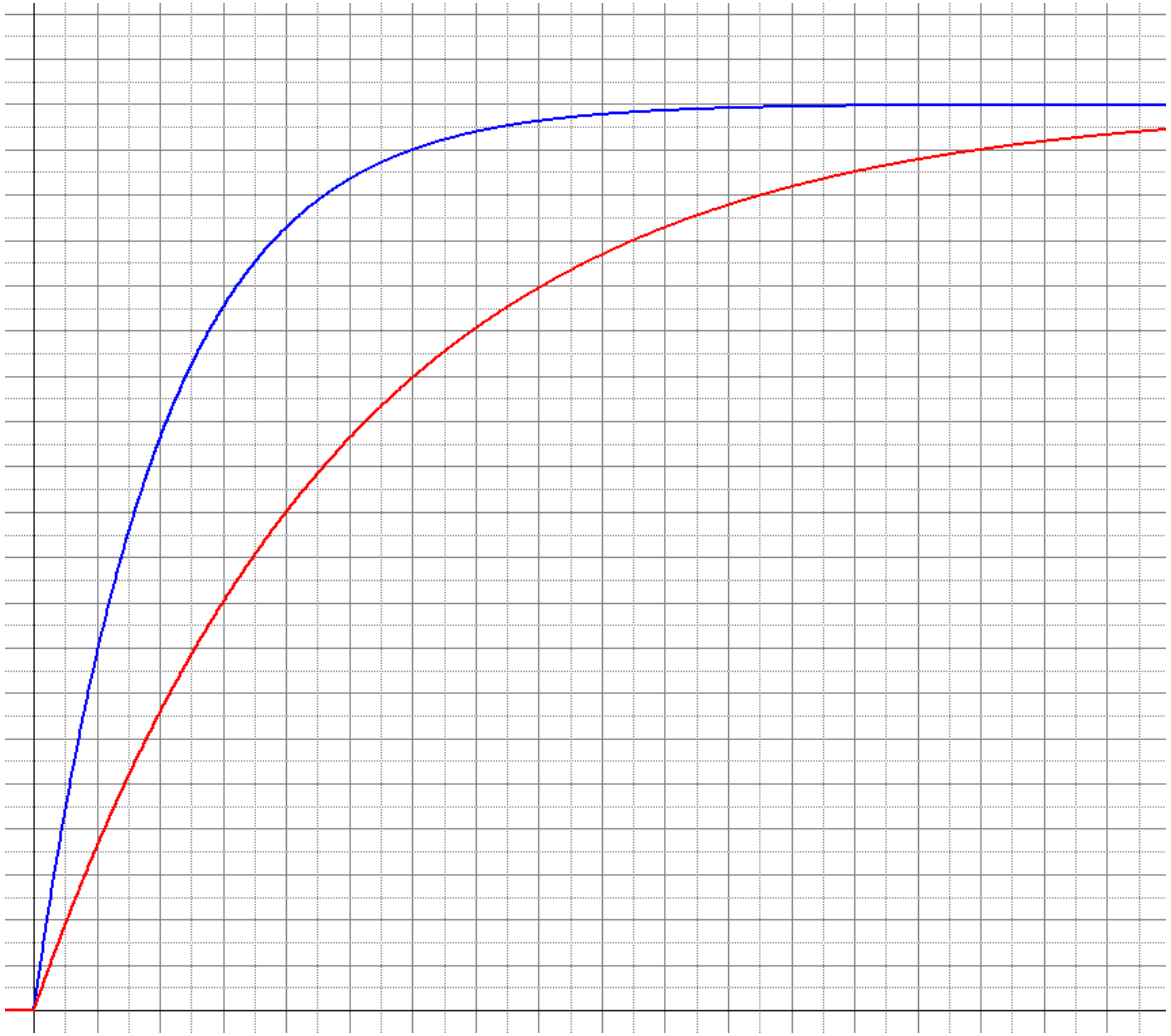
Il faut connaitre par coeur les réponses des ordres 1 et 2 à une consigne de type échelon $\frac{E_0}{p}$: <u>les réponses indicielles.</u>

3. Réponse temporelle

ordre 1 :

$$FTBF(p) = \frac{K}{1 + \tau \, . \, p}$$

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

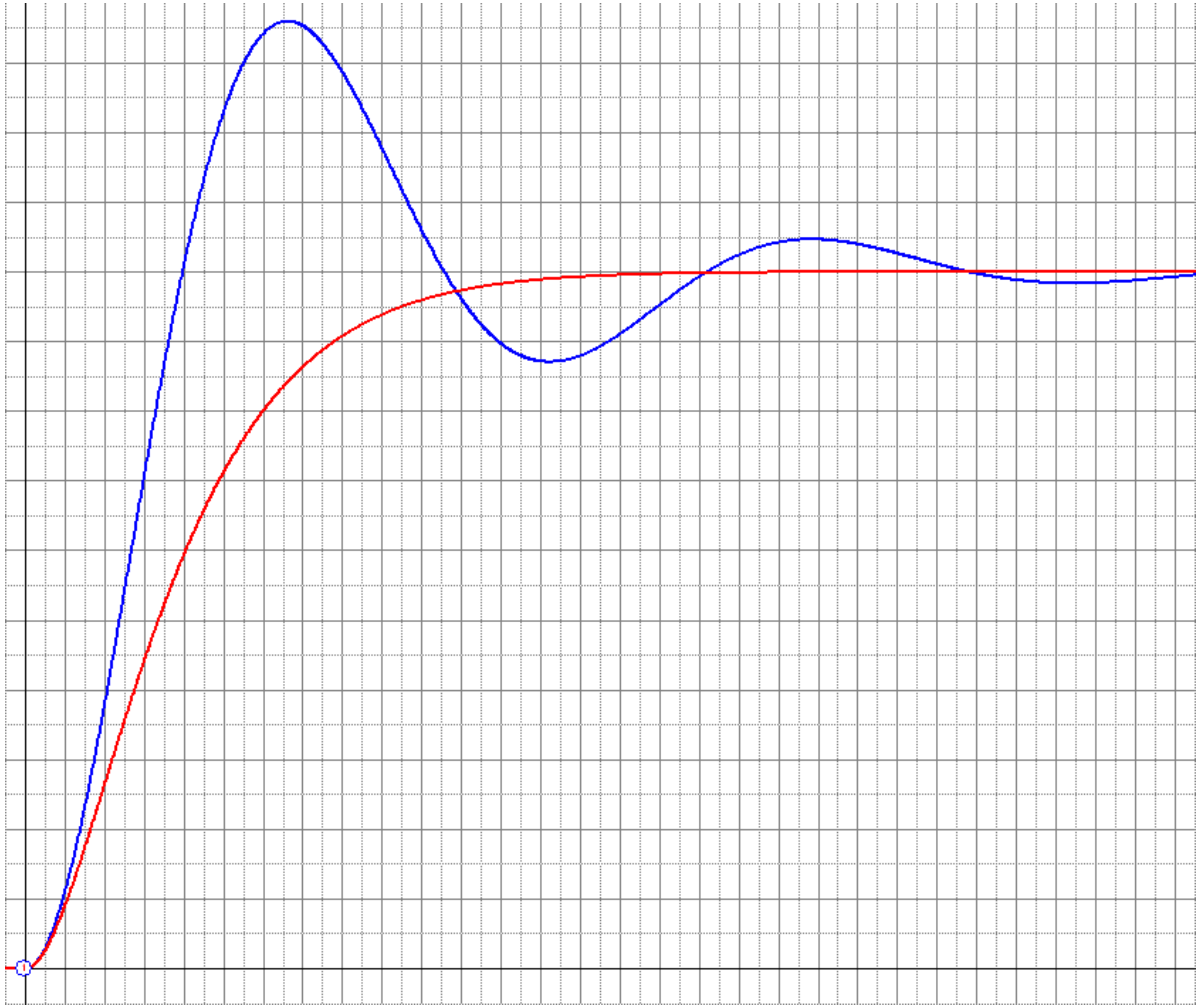


3. Réponse temporelle

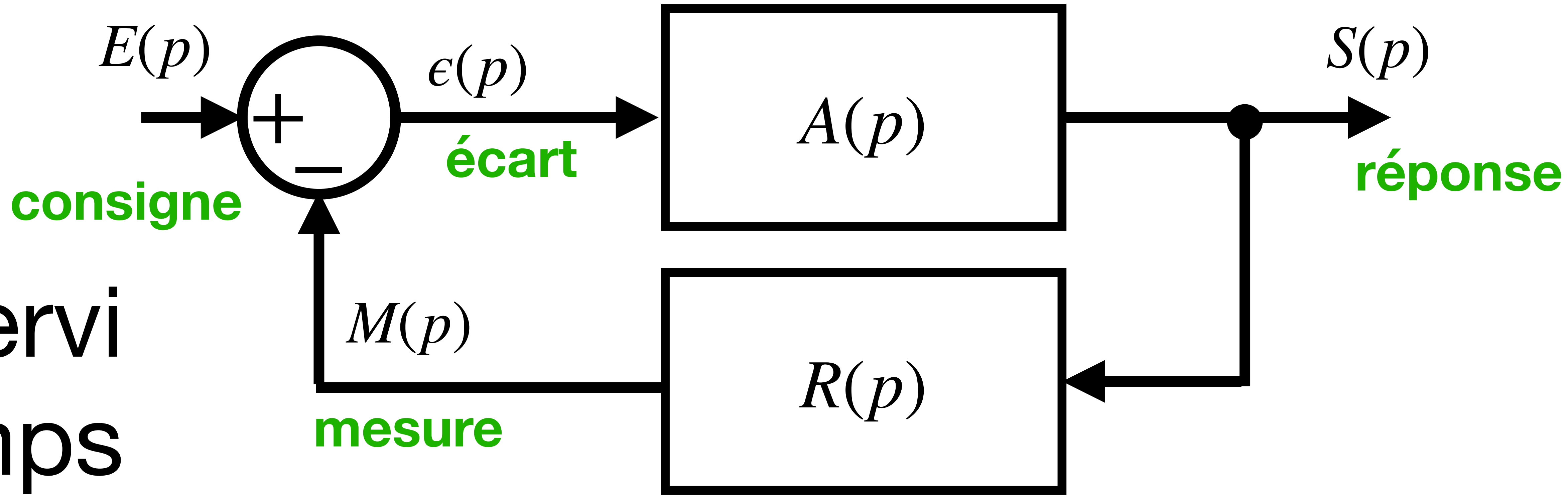
ordre 2 :

$$FTBF(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0{}^2}}$$

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$



4. Réponse fréquentielle



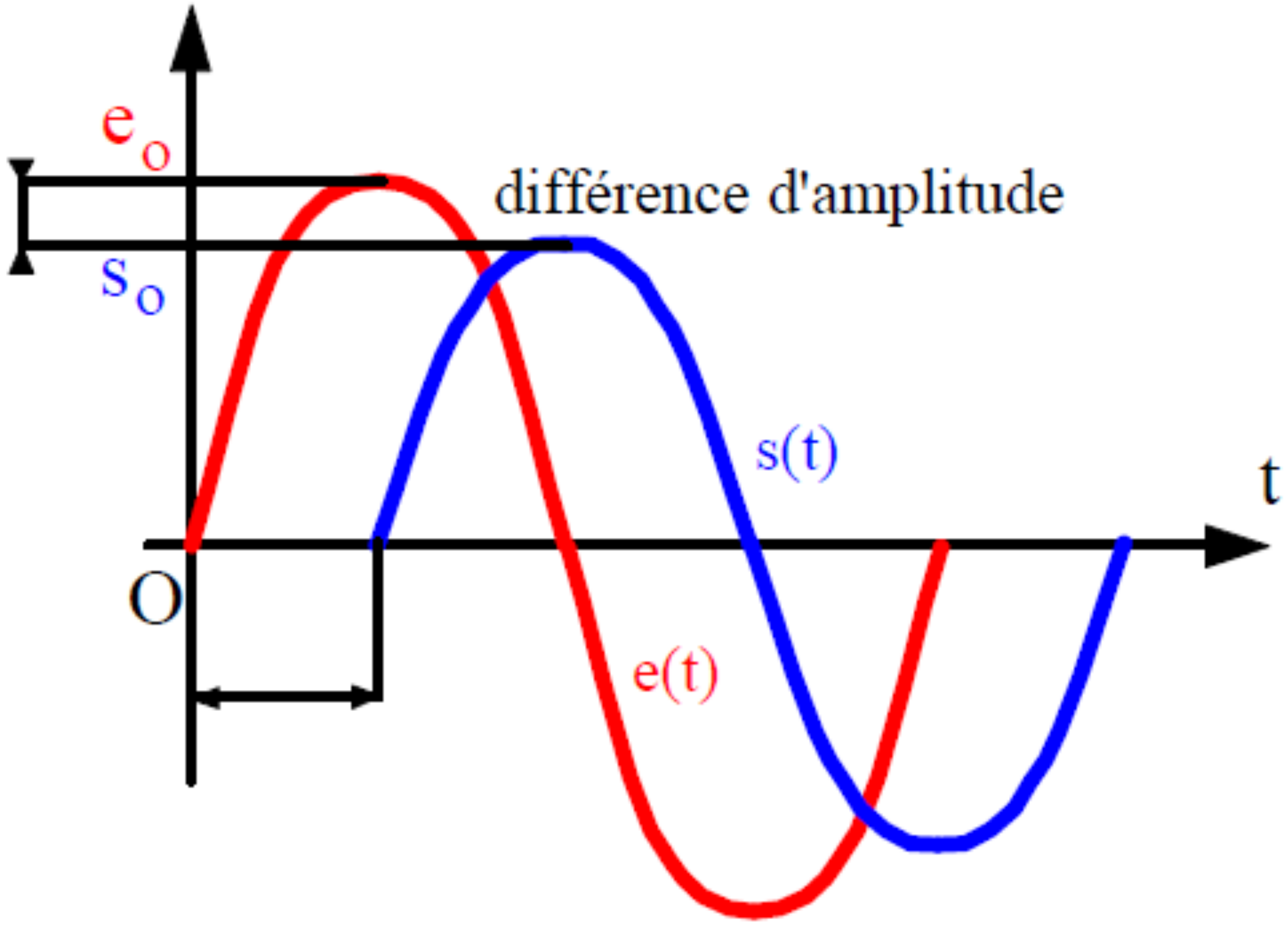
La réponse fréquentielle d'un SLCI asservi est l'étude de la sortie en fonction du temps **pour une consigne sinusoïdale de la forme :**

$$e(t) = E_0 \, . \, sin(\omega \, . \, t)$$

En régime établi, il apparaît que la réponse du système est elle aussi sinusoïdale, de même fréquence que la consigne, mais déphasée et d'amplitude modifiée :

$$s(t) = S_0 \, . \, sin(\omega \, . \, t + \phi)$$

Ainsi, pour connaître la réponse, **il suffit de déterminer S_0 et ϕ**.



4. Réponse fréquentielle

Il est pour cela nécessaire de passer en complexe, en posant $p = j.\omega$ dans l'expression de la FTBF.

On parle de **FTBF complexe** :

$$FTBF(j.\omega) = FTBF(p = j.\omega)$$

Ainsi :

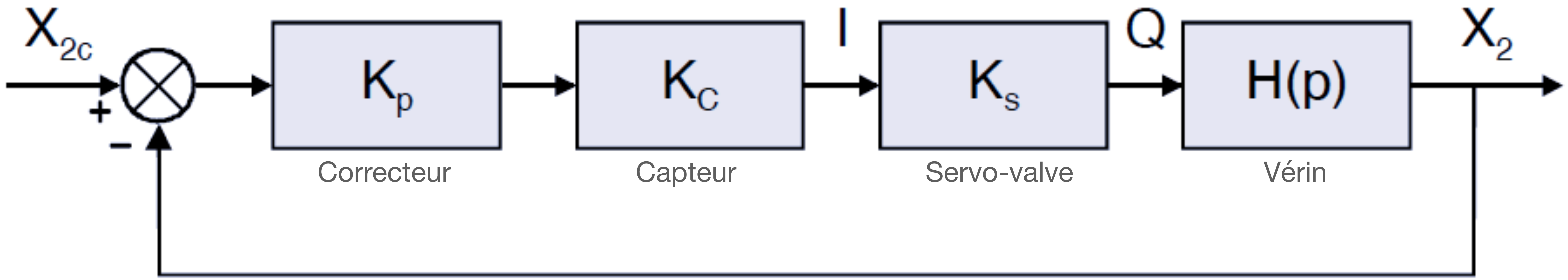
$$\boxed{S_0 = E_0 . |FTBF(j.\omega)|} \quad \text{et} \quad \boxed{\phi = arg(FTBF(j.\omega))}$$

L'étude fréquentielle est donc l'étude du module de la FTBF et de l'argument de la FTBF en fonction de la pulsation de l'entrée ω:

Diagrammes de Bode du gain et de phase

4. Réponse fréquentielle

Pour la gouverne de profondeur de l'A380 fonctionnant à vide, le schéma-bloc de l'asservissement en position du vérin hydraulique est :



$$H(p) = \frac{K_0}{p\left(1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0{}^2}\right)}$$

Tracer les diagrammes de Bode asymptotique de la FTBF :

4. Réponse fréquentielle

Tracer les diagrammes de Bode asymptotique de la FTBF :

4. Réponse fréquentielle

Tracer les diagrammes de Bode asymptotique de la FTBF :

5. Performances : rapidité et précision

La rapidité et la précision d'un SCLI asservi caractérisent sa qualité, ses performances. Pour chacune de ses 2 performances, on se fixe un critère de qualité que l'on doit précisément déterminer.

Performance	**Rapidité**	**Précision**
Critère	Temps de réponse à 5% : $T_{5\%}$	Erreur statique : E_S
Définition	**Temps mis par le système pour rester dans l'intervalle de + ou - 5% de la valeur finale.**	**Différence entre la consigne et la réponse du système en régime permanent.**

F. BLASCHECK

5. Performances : rapidité et précision

La rapidité :

ordre 1 : $FTBF(p) = \dfrac{K}{1 + \tau\,.\,p}$

$$\boxed{T_{5\%} = 3.\tau}$$

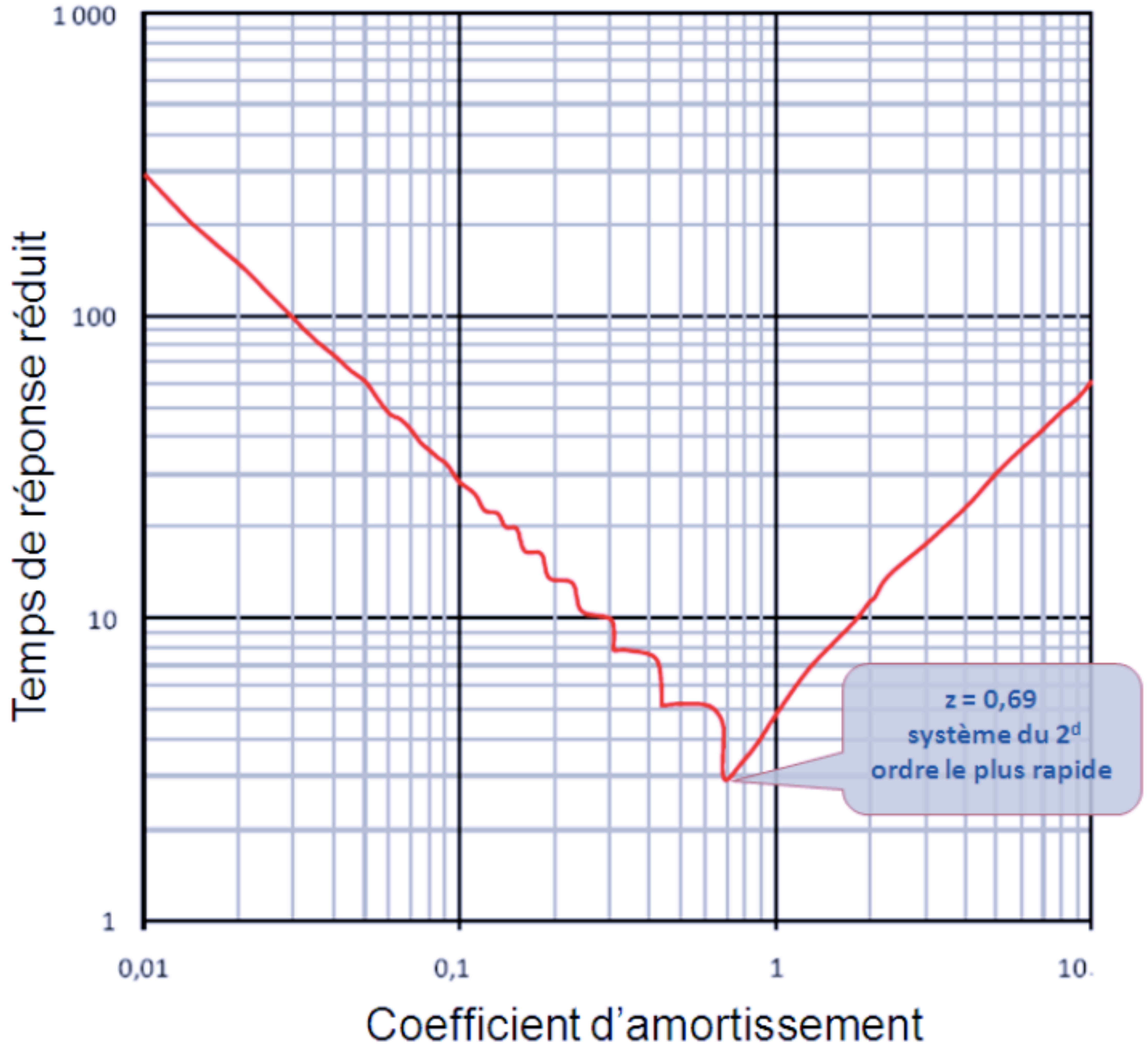
ordre 2 : $FTBF(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2z}{\omega_0}p + \dfrac{p^2}{{\omega_0}^2}}$

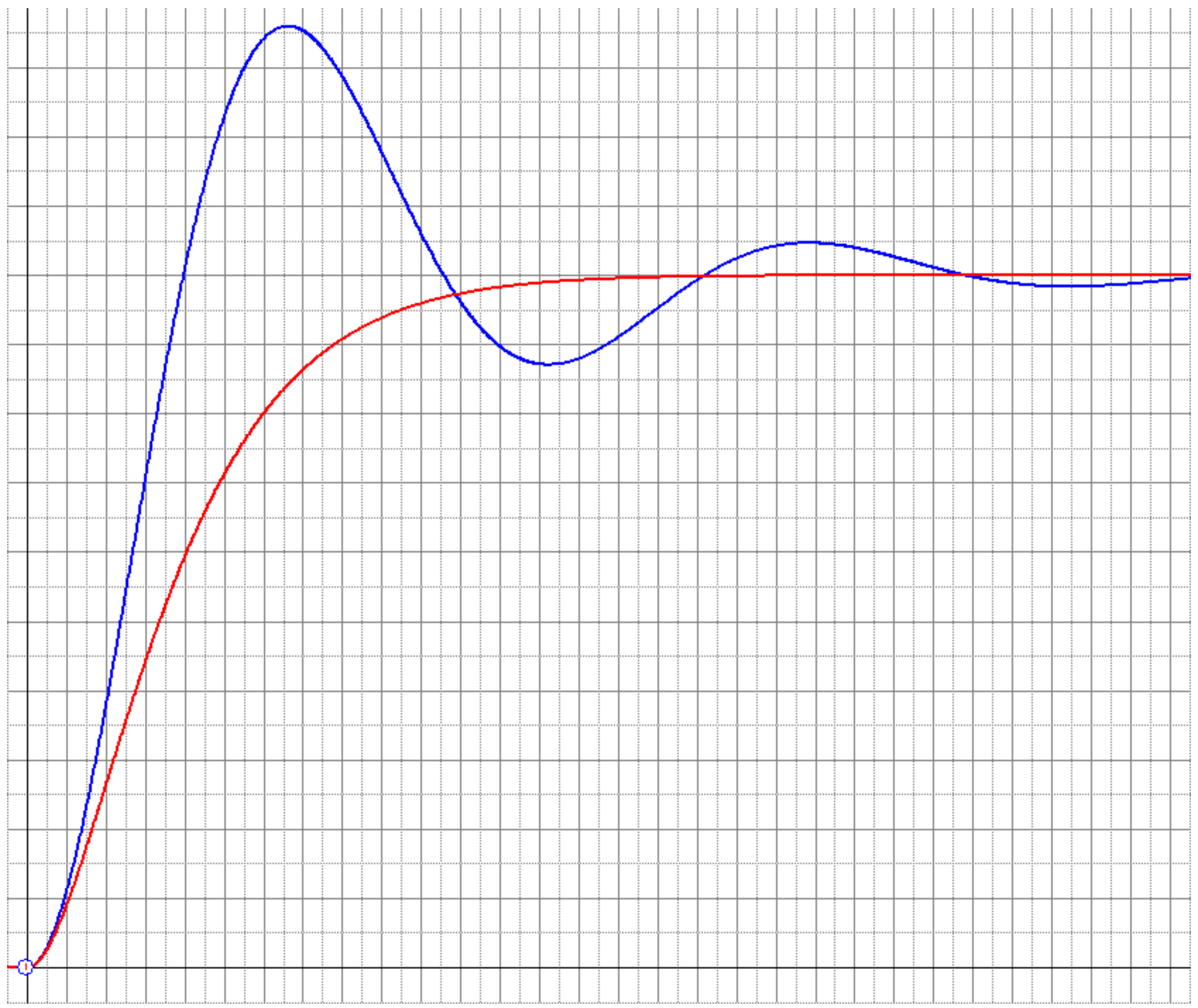
Le temps de réponse à 5% dépend à la fois du facteur d'amortissement et de la pulsation propre du système. Il ne peut pas être déterminé analytiquement, on utilise une abaque issue d'une résolution numérique.

5. Performances : rapidité et précision

La rapidité :

ordre 2 : on utilise l'abaque suivante





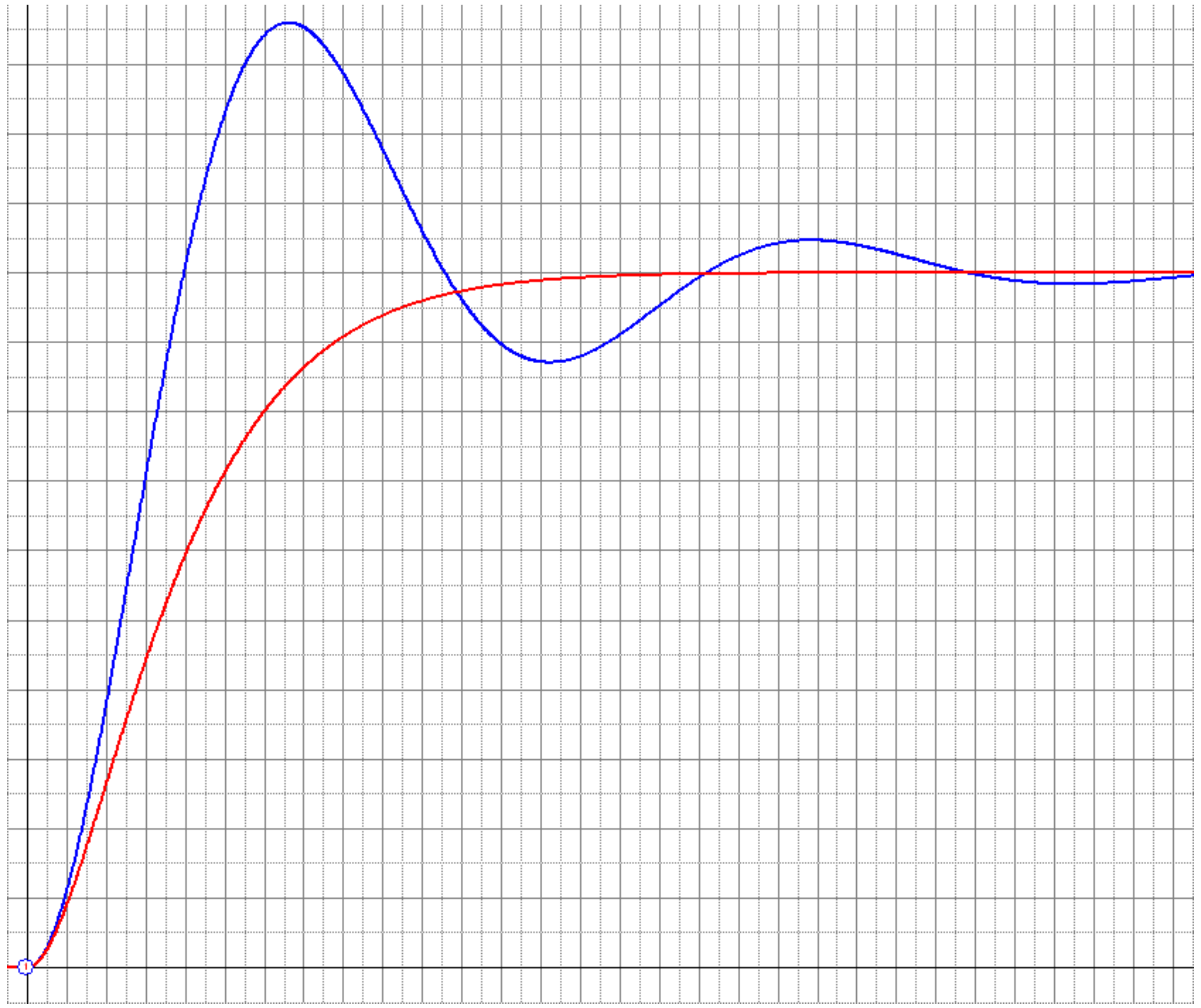
F. BLASCHECK

5. Performances : rapidité et précision

La précision :

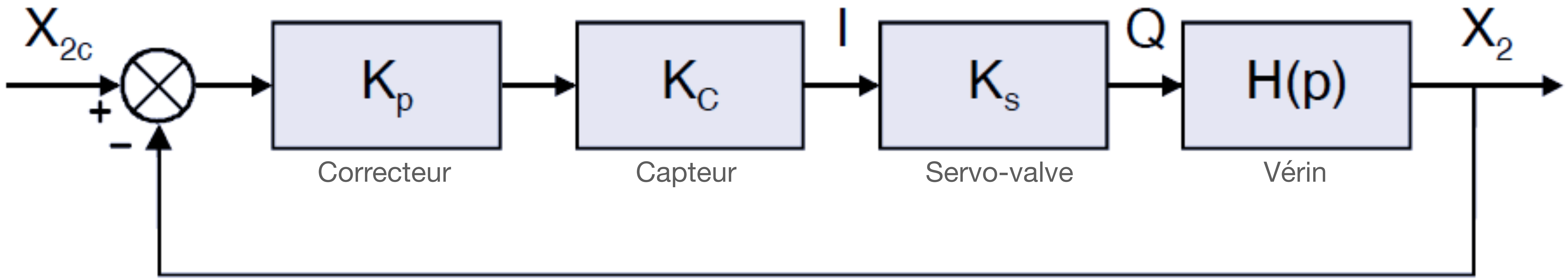
L'étude de la précision mène à la détermination de l'**erreur statique** du système, c'est à dire **la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent** :

$$E_s = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} p \,.\, (E(p) - S(p))$$



5. Performances : rapidité et précision

Pour la gouverne de profondeur de l'A380 fonctionnant à vide, le schéma-bloc de l'asservissement en position du vérin hydraulique est :



$$H(p)=\frac{K_0}{p\left(1+2\frac{\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}\right)}$$

Calcul de l'erreur statique :

5. Performances : rapidité et précision

Calcul de l'erreur statique :

5. Performances : rapidité et précision

Tableau des erreurs statiques :

	Entrée / Classe α	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$E_S = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	0	0	Erreur statique / erreur de position
Rampe	$E(p) = \frac{E_0}{p^2}$	$+\infty$	$E_S = \frac{E_0}{K_{BO}}$	0	Erreur de trainage / erreur de vitesse
Parabole	$E(p) = \frac{E_0}{p^3}$	$+\infty$	$+\infty$	$E_S = \frac{E_0}{K_{BO}}$	Erreur en accélération

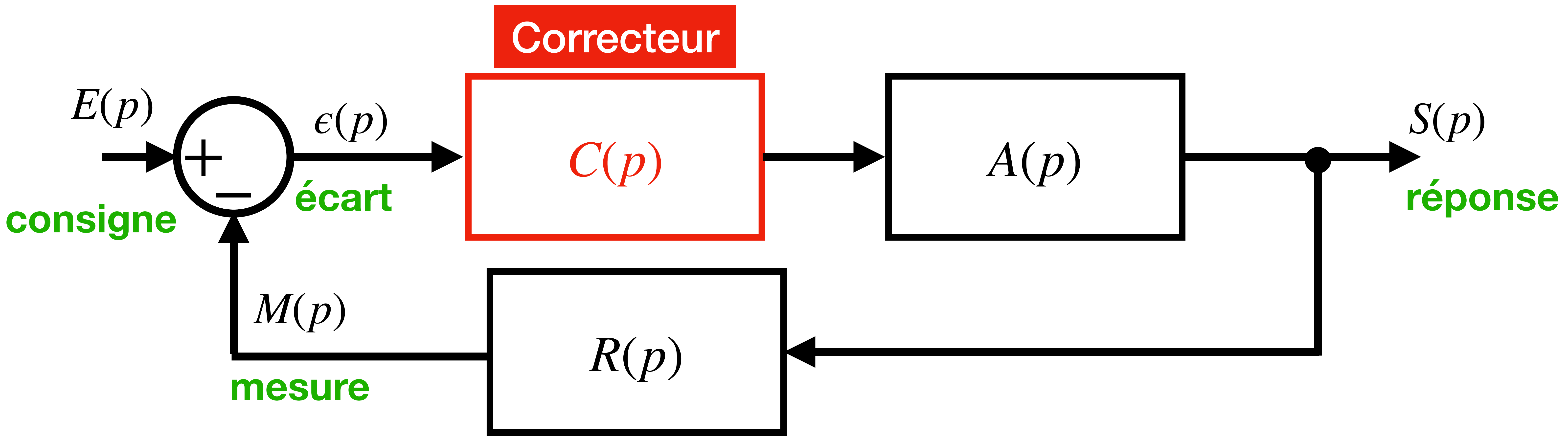
Classe α : nombre d'intégrateurs dans la FTBO

Gain K_{B0} : gain statique de la FTBO

6. Optimisation des performances : correcteur proportionnel

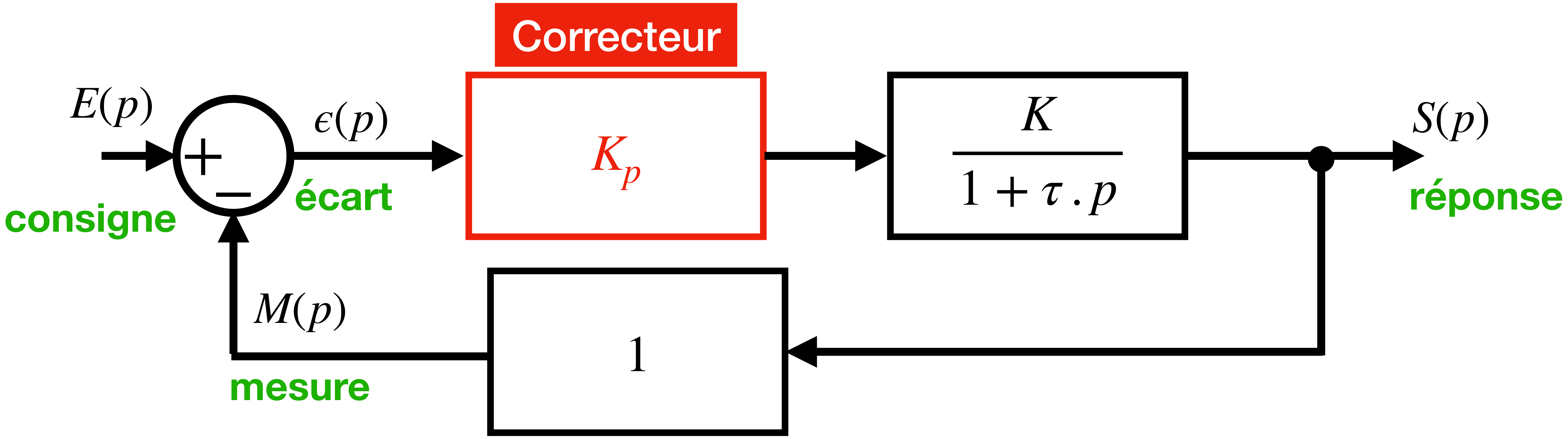
L'optimisation des performances d'un SLCI asservi a pour objectifs de **réduire** l'erreur statique E_S et le temps de réponse à 5% $T_{5\%}$.

Pour cela, l'introduction d'un **correcteur numérique** après le calcul de l'écart permet la modification des caractéristiques du système.



6. Optimisation des performances : correcteur proportionnel

Essayons avec une FTBO d'ordre 1 et un **correcteur proportionnel** $C(p) = K_p$:

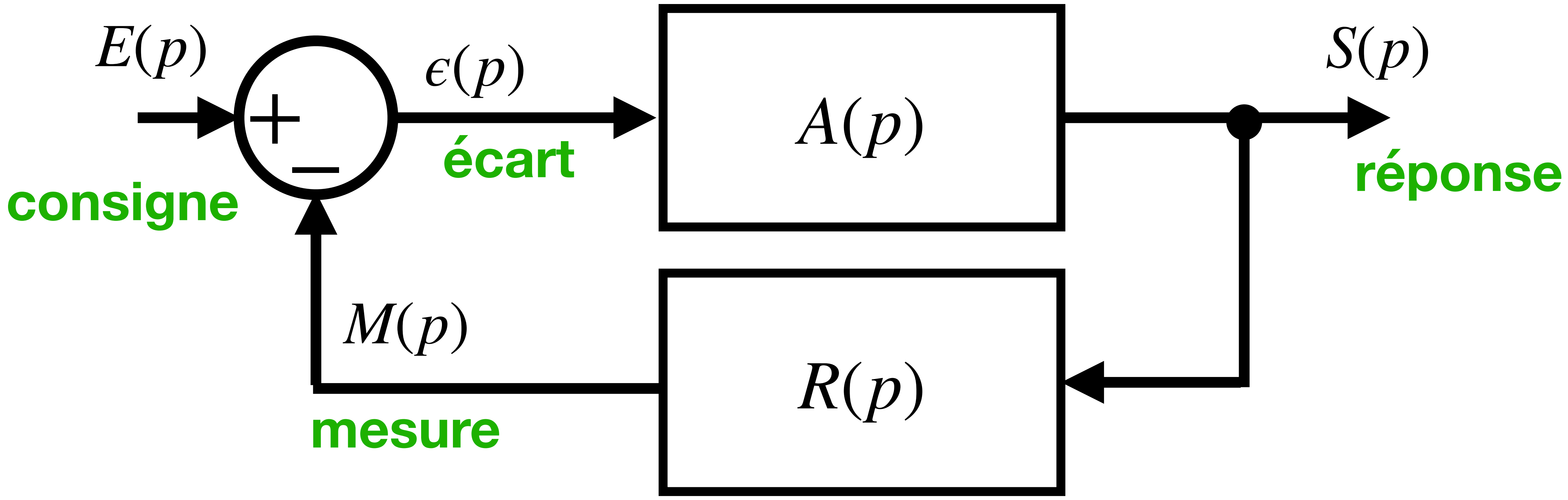


Précision :

6. Optimisation des performances : correcteur proportionnel

Rapidité :

7. Formules à connaître



$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\epsilon(p)} = A(p).R(p) = \prod blocsallerretour$$

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).R(p)} = \frac{\prod blocsaller}{1 + \prod blocsallerretour}$$

ordre 1 : $FTBF(p) = \dfrac{K}{1 + \tau.p}$

K : gain statique

τ : constante de temps (s)

$$T_{5\%} = 3.\tau$$

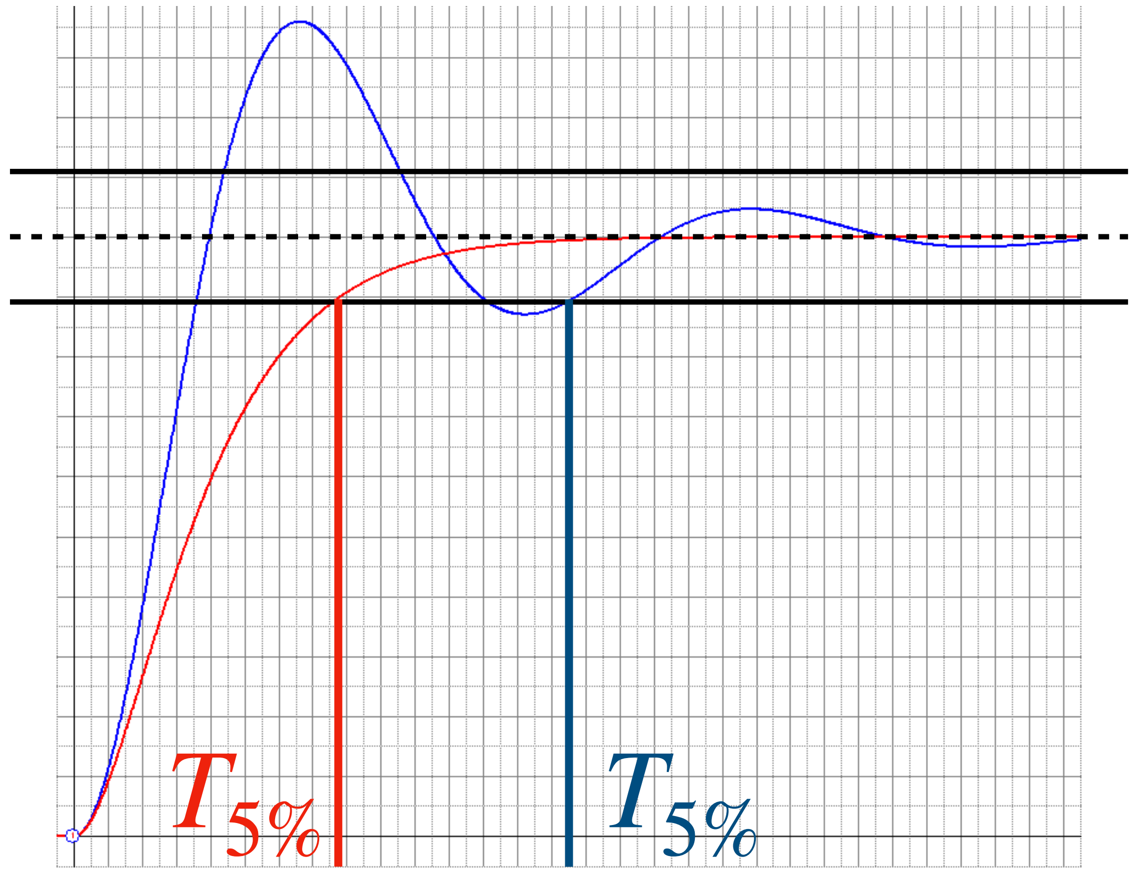
ordre 2 : $FTBF(p) = \dfrac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0{}^2}}$

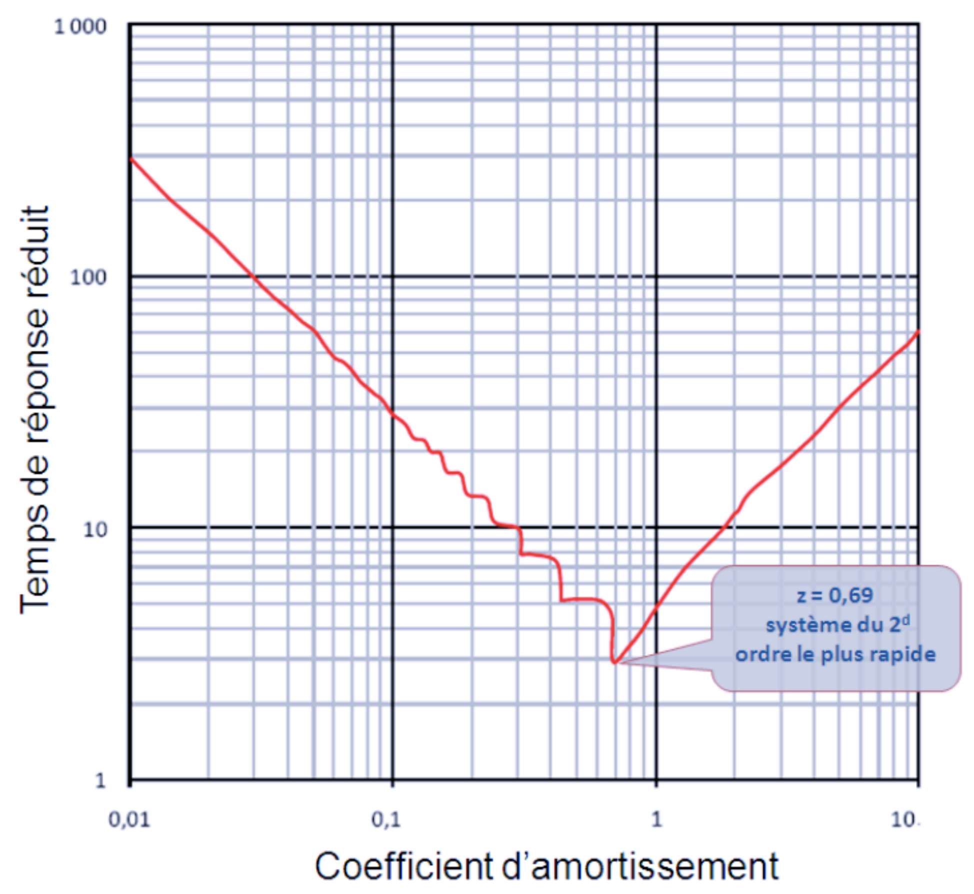
K : gain statique

z : facteur d'amortissement

ω_0 : pulsation propre (rad/s)

$$T_{5\%} : abaque$$





TVF , $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)$

$$E_s = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} p.(E(p) - S(p))$$

Entrée / Classe α	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$E(p) = \dfrac{E_0}{p}$	$E_S = \dfrac{E_0}{1 + K_{BO}}$	0	0
$E(p) = \dfrac{E_0}{p^2}$	$+\infty$	$E_S = \dfrac{E_0}{K_{BO}}$	0
$E(p) = \dfrac{E_0}{p^3}$	$+\infty$	$+\infty$	$E_S = \dfrac{E_0}{K_{BO}}$

F. BLASCHECK